Pertti Koivisto

Analyysi 1

INFORMAATIOTIETEIDEN YKSIKKÖ
TAMPEREEN YLIOPISTO

INFORMAATIOTIETEIDEN YKSIKÖN RAPORTTEJA 46/2016

TAMPERE 2016

TAMPEREEN YLIOPISTO
INFORMAATIOTIETEIDEN YKSIKKÖ
INFORMAATIOTIETEIDEN YKSIKÖN RAPORTTEJA 46/2016
SYYSKUU 2016

Pertti Koivisto

Analyysi 1

INFORMAATIOTIETEIDEN YKSIKKÖ
33014 TAMPEREEN YLIOPISTO

ISBN 978-952-03-0222-1 (pdf)

ISSN-L 1799-8158
ISSN 1799-8158

Alkusanat

Tämä moniste on tarkoitettu oheislukemistoksi Tampereen yliopistossa pidettävälle kurssille Analyysi 1. Monisteen tavoitteena on tukea luentojen seuraamista, harjoitustehtävien ratkaisemista ja tentteihin valmistautumista. Moniste sisältää melko kattavasti kurssilla käsiteltävät asiat, mutta paikoitellen lisäselitykset ja mahdollinen lisämateriaali helpottanevat tekstin seuraamista ja esitettyjen asioiden ymmärtämistä. Moniste ei varsinaisesti ole tarkoitettu kattavaksi itseopiskelupaketiksi.

Monisteen rakenne ja sisältö pohjautuvat suurelta osin jo edesmenneen Seppo Vepsäläisen aikoinaan Tampereen yliopistossa pitämiin luentoihin. Sisältöä on jonkin verran muokattu kevyempään suuntaan ja myös rakenteessa on tehty muutoksia. Kurssin menestyksellinen seuraaminen edellyttää lukion pitkän matematiikan hyvää hallintaa. Tampereen yliopiston opintojaksot Matematiikan peruskäsitteitä ja Johdatus analyysiin pitäisi suorittaa vähintään samanaikaisesti kurssin Analyysi 1 kanssa.

Matematiikan opiskelu saattaa tuntua joskus työläältä, ja tämänkin kurssin opiskelu vaatii useimmilta melko lailla aikaa ja välillä kovaakin ponnistelua. Pelkkä luentojen kuunteleminen tai luentomonisteen toistuvakaan läpilukeminen ei kuitenkaan johda oppimiseen. Oppimisen kannalta tärkeintä on itsenäinen työskentely. Esitetyt todistukset ja esimerkit pitää käydä yksityiskohtaisesti läpi kynää ja paperia käyttäen sillä tarkkuudella, että kaikki yksityiskohdat ja päättelyt tulevat ymmärretyksi. Myös harjoitustehtävien ratkominen on olennaista, sillä esitetyn asian hallitsee vasta, kun pystyy itsenäisesti käsittelemään siihen liittyviä tehtäviä.

Kurssin suorittamisen vaatimaa ajankäyttöä suunnitellessa kannattaa huomioida edellä mainitun itsenäisen työn suuri osuus. Jos lukion matematiikka tai muut esitiedot ovat päässeet unohtumaan tai niiden hallinnassa on muusta syystä puutteita, myös esitietojen kertaamiseen pitää varata riittävästi aikaa (kurssin Analyysi 1 seuraamisen ohessa).

Todistuksien ja esimerkkien huolellinen läpikäynti synnyttää usein paperijätettä. Harjoitustehtäviä ratkaistaessa taas ensimmäinen yritelmä ei läheskään aina tuota oikeaa lopputulosta. Roskakori tai paperinkeräyslaatikko onkin kurssin asioita opiskeltaessa kynän ja paperin ohella hyödyllinen apuväline.

Lopuksi esitän kiitokset kaikille, jotka ovat kommenteillaan, ehdotuksillaan ja neuvoillaan auttaneet minua tämän monisteen teossa.

Pertti Koivisto

Sisältö

1 Reaalilukujen teoriaa

1.1 Merkintöjä ja peruskäsitteitä

Aluksi esitetään lyhyesti muutamia käytettäviä merkintöjä ja peruskäsitteitä. Käytännön syistä asioita esitetään vain siinä laajuudessa kuin on tarpeen kurssin seuraamiseksi. Täsmällisesti näitä ja muita vastaavia asioita tutkitaan muilla matematiikan kursseilla.

1.1.1 Loogisia symboleja ja merkintöjä

Konnektiiveja ja *kvanttoreita* käytetään tällä kurssilla lähinnä lyhennysmerkintöinä luonnollisen kielen ilmaisuille.

Konnektiivit	negaatio	$\neg$	”ei”
	konjunktio	$\wedge$	”ja”
	disjunktio	$\vee$	”tai”
	implikaatio	$\Rightarrow$	” jos … niin”
	ekvivalenssi	$\Leftrightarrow$	”silloin ja vain silloin”
Kvanttorit	eksistenssi	$\exists$	”on olemassa”
	universaali	$\forall$	”kaikilla”

Merkintää $\nexists$ käytetään lyhenteenä merkityksessä ”ei ole olemassa”.

Esimerkki 1.1. Kvanttorien ja konnektiivien avulla voidaan esittää matemaattisia väitteitä täsmällisessä muodossa:

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} && \neg(x^2+1<0) \Leftrightarrow x^2+1 \geq 0,\\
&\text{(ii)} && \exists x>0\colon x^2-1=0,\\
&\text{(iii)} && \forall x>0\colon \exists y>0\colon y^2=x.
\end{aligned}
$$

Selvästi ensimmäinen väite on tosi, mutta kahden jälkimmäisen totuus riippuu siitä, missä perusjoukossa tarkastelu suoritetaan (ks. esimerkki 1.7, s. 4).

Edellä mainittujen loogisten symbolien lisäksi käytetään merkintää $\therefore$ tarkoittamaan seurausta. Merkintä $\therefore$ voidaan tulkita lyhenteeksi esimerkiksi sanoille ”siis, siten, täten, tällöin” jne. Kaksoispistettä käytetään joskus lyhenteenä sanonnalle ”siten, että”.

1.1.2 Joukko ja osajoukko

Joukko voidaan antaa esimerkiksi luettelemalla sen alkiot tai ilmoittamalla sen alkiot määrittävä ominaisuus.

Esimerkki 1.2. $A = \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 1, 3\}$ = joukko, jonka alkiot ovat 1, 2 ja 3.

Esimerkki 1.3. $A = \{x \text{ on kokonaisluku} \,|\, x^2 = 4\} = \{-2, 2\}$.

Kurssilla käytetään seuraavia joukko-opillisia merkintöjä.

$a \in A$	a on joukon A alkio, ts. a *kuuluu* joukkoon A.
$a \notin A$	a ei ole joukon A alkio, ts. a *ei kuulu* joukkoon A.
$A \subseteq B$	Joukko A on joukon B *osajoukko*, jos kaikki A:n alkiot ovat myös joukon B alkioita. Tällöin sanotaan, että A *sisältyy* joukkoon B.
$A \subset B$	Jos $A \subseteq B$ ja $A \neq B$, niin tällöin A on joukon B *aito osajoukko*.
$\emptyset$	*Tyhjä joukko* on joukko, johon ei kuulu yhtään alkiota.

Huomautus. Jos A on joukko, niin $\emptyset \subseteq A$ ja $A \subseteq A$.

1.1.3 Tärkeimpien lukujoukkojen merkinnät

Tärkeimmillä lukujoukoilla on vakiintuneet merkintänsä. Tällä kurssilla

- $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ on luonnollisten lukujen joukko,
- $\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ on kokonaislukujen joukko,
- $\mathbf{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ on positiivisten kokonaislukujen joukko,
- $\mathbf{Z}_- = \{x \,|\, -x \in \mathbf{Z}_+\}$ on negatiivisten kokonaislukujen joukko,
- $\mathbf{Q} = \{\frac{p}{q} \,|\, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0\}$ on rationaalilukujen joukko,
- $\mathbf{R}$ on reaalilukujen joukko,
- $\mathbf{C} = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbf{R}, i^2 = -1\}$ on kompleksilukujen joukko.

Joukot $\mathbf{Q}_+$, $\mathbf{Q}_-$, $\mathbf{R}_+$ ja $\mathbf{R}_-$ määritellään vastaavalla tavalla kuin kokonaisluvuillekin.

Huomautus. Vaikka termit ovat vakiintuneet, ne eivät kuitenkaan ole täysin standardeja. Luonnollisten lukujen joukko nimittäin tarkoittaa toisinaan nyt määritellyn joukon sijasta joukkoa $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Tällä kurssilla tuota joukkoa kutsutaan positiivisten kokonaislukujen joukoksi ($= \mathbf{Z}_+$).

Huomautus. Nyt pätee $\mathbf{Z}_+ \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

Esimerkki 1.4. Parillisten ja parittomien luonnollisten lukujen joukot voidaan esittää

$$\begin{aligned}\{0, 2, 4, \ldots\} &= \{n \in \mathbf{N} \mid \exists\, k \in \mathbf{N} : n = 2k\},\\ \{1, 3, 5, \ldots\} &= \{n \in \mathbf{N} \mid \exists\, k \in \mathbf{N} : n = 2k + 1\}.\end{aligned}$$

Esimerkki 1.5 (Bernoullin epäyhtälö)**.** Jos $x \in \mathbf{R}$, $x > -1$, niin

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Bernoullin epäyhtälö on helppo todistaa käyttämällä induktioperiaatetta (harjoitustehtävä).

1.1.4 Joukkojen perusoperaatiot

Seuraavaksi esitetään muutamia joukko-opillisia operaatioita, joita käyttäen voidaan muodostaa tunnetuista joukoista uusia joukkoja. Olkoot siis A ja B joukkoja. Tällöin joukkojen A ja B

- *yhdiste (unioni)* $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ tai } x \in B\}$,
- *leikkaus* $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ja } x \in B\}$,
- *erotus* $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ ja } x \notin B\}$.

Usein joukkoja tarkastellaan jonkin laajemman joukon osajoukkoina. Tällaista joukkoa sanotaan *perusjoukoksi* ja sitä merkitään usein symbolilla Ω. Tällöin voidaan muodostaa joukon A *komplementti*

$$A^c = \Omega \setminus A = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}.$$

Komplementista käytetään joskus myös muita merkintöjä, esimerkiksi $\overline{A}$, $-A$, $\tilde{A}$, $\sim A$, $\setminus A$, A', $C(A)$.

Esimerkki 1.6. (a) $\mathbf{N} = \mathbf{Z}_+ \cup \{0\}$,

(b) $\mathbf{Z}_+ \setminus \left\{x \in \mathbf{Z}_+ \mid \frac{x}{2} \in \mathbf{Z}_+\right\} = \{1, 3, 5, \ldots\}$,

(c) $A \setminus A = \emptyset$ aina, kun A on joukko.

Esimerkki 1.7. Jatketaan esimerkin 1.1 väitteiden

$$\text{(ii) } \exists x > 0\colon x^2 - 1 = 0 \quad \text{ja} \quad \text{(iii) } \forall x > 0\colon \exists y > 0\colon y^2 = x$$

käsittelyä. Jos väitteitä tarkastellaan esimerkiksi joukossa $\mathbf{R}$, molemmat väitteet ovat tosia. Väitteessä (ii) voidaan nimittäin valita $x = 1$ ja väitteessä (iii) vastaavasti $y = \sqrt{x}$ (kun $x > 0$). Joukossa $\mathbf{R} \setminus \{2\}$ väite (ii) on edelleen tosi, mutta väite (iii) muuttuu epätodeksi. Jos nimittäin $x = 4$, niin minkään joukkoon $\mathbf{R} \setminus \{2\}$ kuuluvan positiivisen reaaliluvun neliö ei ole x. Joukossa $\mathbf{R} \setminus \{1, 2\}$ taas kumpikaan väite ei päde, ja jos perusjoukoksi valitaan $\mathbf{R} \setminus \{1\}$, niin väite (ii) on epätosi ja väite (iii) tosi.

1.1.5 Reaalilukuvälit

Reaalilukuväliä eli lyhyemmin *väliä* merkitään usein kirjaimella I tai Δ. Olkoon $a, b \in \mathbf{R}$ ja $a < b$. Tällöin voidaan määritellä (äärelliset) reaalilukuvälit

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b\} \quad \text{(suljettu väli)},\\
]a, b[&= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\} \quad \text{(avoin väli)},\\
[a, b[&= \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x < b\} \quad \text{(puoliavoin väli)},\\
]a, b] &= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \le b\} \quad \text{(puoliavoin väli)}.
\end{aligned}$$

Koska $a < b$, niin tyhjä joukko tai yksittäinen piste ei ole väli. Myös seuraavista joukoista käytetään väli-nimitystä ($a \in \mathbf{R}$):

$$\begin{aligned}
[a, \infty[&= \{x \in \mathbf{R} \mid x \ge a\},\\
]a, \infty[&= \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\},\\
]-\infty, a] &= \{x \in \mathbf{R} \mid x \le a\},\\
]-\infty, a[&= \{x \in \mathbf{R} \mid x < a\},\\
]-\infty, \infty[&= \mathbf{R}.
\end{aligned}$$

Huomautus. Yllä ∞ on symboli, joka on suurempi kuin mikä tahansa reaaliluku. Tällöin $-\infty$ on pienempi kuin mikä tahansa reaaliluku. Siis ∞ tai $-\infty$ eivät ole reaalilukuja.

1.1.6 Rajoitettu joukko

Tarkastellaan seuraavaksi vielä lyhyesti, mitä rajoitetulla reaalilukujen osajoukolla tarkoitetaan.

Määritelmä 1.1. Olkoon $A \subseteq \mathbf{R}, A \neq \emptyset$. Joukko A on *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa $M \in \mathbf{R}$ siten, että $a \leq M$ kaikilla $a \in A$. Tällöin M on (eräs) joukon A *yläraja*.

Määritelmä 1.2. Olkoon $A \subseteq \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$. Joukko A on *alhaalta rajoitettu*, jos on olemassa $m \in \mathbf{R}$ siten, että $a \geq m$ kaikilla $a \in A$. Tällöin m on (eräs) joukon A *alaraja*.

Huomautus. Joukko $\mathbf{R}$ ei itse ole ylhäältä eikä alhaalta rajoitettu.

Huomautus. Olkoon $A \subseteq \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$. Jos $M \in \mathbf{R}$ on joukon A yläraja ja $M' > M$, niin myös M' on joukon A yläraja. Vastaavasti jos $m \in \mathbf{R}$ on joukon A alaraja ja $m' < m$, niin myös m' on joukon A alaraja.

Huomautus. Olkoon $A \subseteq \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$. Jos $M \in \mathbf{R}$ on joukon A yläraja, niin $A \subseteq \left]-\infty, M\right]$, ja jos $m \in \mathbf{R}$ on joukon A alaraja, niin $A \subseteq \left[m, \infty\right[$.

Esimerkki 1.8. Olkoon $A = \left]1, 5\right]$. Tällöin joukon A ylärajoja ovat luku 5 ja kaikki lukua 5 suuremmat reaaliluvut. Alarajoja ovat vastaavasti luku 1 ja kaikki lukua 1 pienemmät reaaliluvut. Erityisesti on syytä huomata, että joukon ylä- tai alarajan ei tarvitse kuulua joukkoon, mutta se voi kuulua.

Määritelmä 1.3. Joukko on *rajoitettu*, jos se on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu.

Huomautus. Jos $A \subseteq \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$, niin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.

(i) Joukko A on rajoitettu.

(ii) On olemassa sellaiset $m \in \mathbf{R}$ ja $M \in \mathbf{R}$, että $m \leq a \leq M$ kaikilla $a \in A$.

(iii) On olemassa sellaiset $m \in \mathbf{R}$ ja $M \in \mathbf{R}$, että $A \subseteq [m, M]$.

(iv) On olemassa sellainen $M > 0$, että $A \subseteq [-M, M]$.

1.1.7 Summa ja tulo

Jos $n \in \mathbf{Z}_+$ ja $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, niin merkitään

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \Big(= \sum_{i=3}^{n+2} a_{i-2} \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k\Big).$$

Summan rajoja voidaan muuttaa, jos muutos kompensoidaan vastaavalla muutoksella summattavassa lausekkeessa. Summausindeksin merkintäkirjaimella ei myöskään ole merkitystä.

Huomautus. Merkintä voidaan laajentaa tapaukseen $n < 1$ (tai yleisemmin tapaukseen yläraja < alaraja) sopimalla, että kyseessä on ns. *tyhjä summa*, jonka arvoksi määritellään 0.

Esimerkki 1.9. Lukujen $1, 2, 3, 4$ neliöiden summa $1 + 4 + 9 + 16 \;=\; \sum_{i=1}^{4} i^2$.

Esimerkki 1.10. Lukujen $1, 2, \ldots, 100$ neliöiden summa voidaan merkitä

$$\sum_{i=1}^{100} i^2 \;=\; \sum_{i=0}^{99} (i+1)^2 \;=\; \sum_{k=2}^{101} (k-1)^2.$$

Esimerkki 1.11. Summattaessa tapahtuu usein kumoutumista. Esimerkiksi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) \;&=\; (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \\ &=\; a_n - a_0. \end{aligned}$$

Esimerkki 1.12. Jos summattava ei sisällä summausindeksistä riippuvia lausekkeita, saadaan yksinkertaisesti

$$\sum_{i=1}^{n} a \;=\; \overbrace{a + a + \cdots + a}^{n \text{ kpl}} \;=\; na.$$

Palautetaan vielä mieleen luvun $n \in \mathbf{N}$ *kertoma*

$$\begin{aligned} n! \;&=\; 1 \cdot 2 \cdot \;\cdots\; \cdot n \quad (= n \cdot (n-1)!) \quad (n \geq 1), \\ 0! \;&=\; 1 \end{aligned}$$

ja *binomikerroin*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (0 \leq k \leq n),$$

jonka avulla voidaan kätevästi esittää *binomikaava*. Kaavan todistus (induktio tai kombinatorinen perustelu) jätetään harjoitustehtäväksi.

Esimerkki 1.13 (Binomikaava)**.** Jos $x, y \in \mathbf{R}$ ja $n \in \mathbf{Z}_+$, niin[1]

$$(x+y)^n \;=\; \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i .$$

Vastaavasti kuin summalle merkitään

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \;\cdots\; \cdot a_n \;=\; \prod_{i=1}^{n} a_i .$$

Huomautus. Tämäkin merkintä voidaan laajentaa tapaukseen $n < 1$ (tai yleisemmin tapaukseen yläraja < alaraja) sopimalla, että kyseessä on ns. *tyhjä tulo*, jonka arvoksi määritellään 1.

Esimerkki 1.14. Lukujen $1, 2, 3, 4$ neliöiden tulo $1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 \;=\; \prod_{i=1}^{4} i^2$.

[1] Jos $x = 0$ tai $y = 0$, on binomikaavan ”summamuodossa” tulkittava $0^0 = 1$. Jos käytetään muotoilua

$$(x+y)^n \;=\; \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n ,$$

tulkintaongelmia ei synny.

1.2 Itseisarvo

1.2.1 Määritelmä ja perusominaisuuksia

Määritelmä 1.4. Reaaliluvun x *itseisarvo*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0, \\ -x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Huomautus 1.1. Selvästi $|x| = |-x|$ (kaikilla $x \in \mathbf{R}$).

Lause 1.2. *Olkoon $x, y \in \mathbf{R}$. Tällöin*

(a) $-|x| \leq x \leq |x|$,

(b) $|x| > 0$, *jos* $x \neq 0$, *ja* $|x| = 0$, *jos* $x = 0$,

(c) $|xy| = |x|\,|y|$.

Todistus. Kohdat (a) ja (b) seuraavat suoraan itseisarvon määritelmästä. Kohta (c) seuraa itseisarvon määritelmästä, kun tarkastellaan erikseen lukujen x ja y eri merkkiyhdistelmiä. Täsmällinen suoritus jätetään harjoitustehtäväksi.

□

Lause 1.3. *Olkoon $x, y \in \mathbf{R}$. Tällöin*

$$x^2 < y^2 \;\Leftrightarrow\; |x| < |y|\,.$$

Todistus. Lauseen 1.2c ja itseisarvon määritelmän nojalla

$$|x|^2 \;=\; |x| \cdot |x| \;=\; |x \cdot x| \;=\; \left|x^2\right| \;=\; x^2$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Jos $x = y = 0$, niin lauseen väite on selvästi tosi. Jos taas $x \neq 0$ tai $y \neq 0$, niin lauseen 1.2b nojalla $|x| + |y| > 0$, joten

$$\begin{aligned} x^2 < y^2 \;&\Leftrightarrow\; |x|^2 < |y|^2 \\ &\Leftrightarrow\; |x|^2 - |y|^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow\; (|x| + |y|)\,(|x| - |y|)) < 0 \\ &\Leftrightarrow\; |x| - |y| < 0 \\ &\Leftrightarrow\; |x| < |y|\,. \end{aligned}$$

□

1.2.2 Itseisarvo etäisyytenä

Geometrisesti $|x - y|$ tarkoittaa lukujen x ja y välistä *etäisyyttä*. Erityisesti $|x|$ on luvun x etäisyys nollasta.

Lause 1.4. *Jos $a, x \in \mathbf{R}$, niin*

$$|x| < a \;\Leftrightarrow\; -a < x < a.$$

Todistus. Jos $a \leq 0$, niin lause on triviaalisti tosi. Olkoon siis $a > 0$. Tarkastellaan ensin suuntaa '$\Rightarrow$', ja oletetaan, että $|x| < a$. Tällöin on kaksi mahdollisuutta.

1. Jos $x \geq 0$, niin $-a < x = |x| < a$.
2. Jos $x < 0$, niin $a > x = -|x| > -a$.

Siis kummassakin tapauksessa väite on tosi.

Tarkastellaan sitten suuntaa '$\Leftarrow$', ja oletetaan, että $-a < x < a$. Tällöin on kaksi mahdollisuutta.

1. Jos $x \geq 0$, niin $|x| = x < a$.
2. Jos $x < 0$, niin $|x| = -x < -(-a) = a$.

Siis kummassakin tapauksessa väite on tosi. $\square$

Seuraavat lauseen 1.4 seuraukset ovat ilmeisiä.

Seuraus 1.5. *Jos $a, x \in \mathbf{R}$, niin*

$$|x| > a \;\Leftrightarrow\; x > a \text{ tai } x < -a.$$

Seuraus 1.6. *Jos $a, b, x \in \mathbf{R}$, niin*

$$|x - b| < a \;\Leftrightarrow\; b - a < x < b + a.$$

Seuraus 1.7. *Joukko $A \subseteq \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$, on rajoitettu täsmälleen silloin, kun on olemassa sellainen $M \in \mathbf{R}$, että $|a| \leq M$ kaikilla $a \in A$.*

Esimerkki 1.15. Jos $|x - y| < 2$, niin lukujen x ja y välinen etäisyys on pienempi kuin 2. Jos esimerkiksi $x = 5$, niin $3 < y < 7$ eli $y \in \,]3, 7[$.

Esimerkki 1.16. Milloin epäyhtälö $|x-3|+|1-x|<4$ on voimassa?

Suoraviivainen tapa ratkaista tehtävä on poistaa itseisarvot jakamalla reaalilukujoukko sopiviin osiin. Ratkaistaan tehtävä nyt kuitenkin tutkimalla etäisyyksiä.

Epäyhtälö tarkoittaa, että pisteen x etäisyys pisteistä 1 ja 3 on yhteensä vähemmän kuin 4. Koska pisteiden 1 ja 3 välinen etäisyys on 2, kyseeseen tulevat ensinnäkin kaikki välin $[1,3]$ pisteet. Kyseisen välin ulkopuolelta mukaan tulevat pisteet, joiden etäisyys välin päätepisteistä on vähemmän kuin 1 eli välien $]0,1[$ ja $]3,4[$ pisteet. Siis vastaukseksi saadaan välin $]0,4[$ pisteet.

Esimerkki 1.17. Osoitetaan, että jos $|x-3|<7^{-13}$, niin $|x^2-9|<7^{-12}$.

Valitaan $x \in \mathbf{R}$ siten, että $|x-3|<7^{-13}$. Aputuloksena havaitaan ensin, että tällöin $|x-3|<1$, joten $x \in]2,4[$ ja edelleen

$$5 < x+3 < 7.$$

Täten lauseen 1.2c, itseisarvon määritelmän, aputuloksen ja oletuksen nojalla

$$\begin{aligned}
\left|x^2-9\right| &= |(x+3)(x-3)| \\
&= |x+3|\,|x-3| \\
&= (x+3)\,|x-3| \\
&\leq 7\cdot|x-3| \\
&< 7\cdot 7^{-13} \\
&= 7^{-12}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 1.18. Etsitään sellainen $h>0$, että jos $|x-4|<h$, niin

$$\left|\sqrt{x}-2\right| < 10^{-15}.$$

Voidaan olettaa, että $h<4$. Tällöin $|x-4|<4$, joten $x>0$ ja edelleen $\sqrt{x}>0$. Täten

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{x}-2\right| &= \left|\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+2}\right| \\
&= \frac{1}{|\sqrt{x}+2|}\,|x-4| \\
&\overset{\sqrt{x}>0}{=} \frac{1}{\sqrt{x}+2}\,|x-4| \\
&\overset{\sqrt{x}>0}{\leq} \frac{1}{2}\cdot|x-4| \\
&< 10^{-15},
\end{aligned}$$

kun $|x-4|<2\cdot 10^{-15}$. Siis voidaan valita $h=2\cdot 10^{-15}$.

1.2.3 ε-ympäristö

Määritelmä 1.5. Olkoon $\varepsilon > 0$. Pisteen $a \in \mathbf{R}$ *ε-ympäristö* $\mathrm{U}_\varepsilon(a)$ on niiden lukujen $x \in \mathbf{R}$ joukko, jotka toteuttavat ehdon

$$|x - a| < \varepsilon.$$

Toisin sanoen

$$\mathrm{U}_\varepsilon(a) = \Big\{ x \in \mathbf{R} \;\Big|\; |x-a| < \varepsilon \Big\}.$$

Huomautus. Pisteen a ε-ympäristöä merkitään myös $\mathrm{U}(a, \varepsilon)$.

Huomautus. Pisteen a ε-ympäristö on niiden lukujen x joukko, joiden etäisyys pisteestä a on pienempi kuin ε. Seurauksen 1.6 perusteella

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$$

eli

$$\mathrm{U}_\varepsilon(a) = \left]a - \varepsilon, a + \varepsilon\right[\,.$$

Esimerkki 1.19. $\mathrm{U}_1(5) = \mathrm{U}(5, 1) = \left]4, 6\right[$, $\mathrm{U}(2, \frac{1}{n}) = \left]2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right[$ $(n \in \mathbf{Z}_+)$.

Määritelmä 1.6. Pisteen a *puhkaistu ε-ympäristö* $\mathrm{U}'_\varepsilon(a)$ on pisteen a ε-ympäristö, josta itse piste a on poistettu. Toisin sanoen

$$\mathrm{U}'_\varepsilon(a) \;=\; \left]a - \varepsilon, a + \varepsilon\right[\setminus \{a\}.$$

Esimerkki 1.20. $\mathrm{U}'_2(5) \;=\; \left]3, 5\right[\cup \left]5, 7\right[$.

1.2.4 Kolmioepäyhtälö

Lause 1.8 (Kolmioepäyhtälö)**.** *Olkoon $x, y \in \mathbf{R}$. Tällöin*

$$|x \pm y| \;\leq\; |x| + |y|\,.$$

Todistus. Koska $|-y| = |y|$, riittää todistaa tapaus $|x + y|$. Lauseen 1.2a nojalla

$$x \leq |x|\,,\; -x \leq |x|\,,\; y \leq |y|\,,\; -y \leq |y| \qquad \forall x, y \in \mathbf{R},$$

joten

$$x + y \;\leq\; |x| + |y| \quad \text{ja} \quad -(x+y) \;\leq\; |x| + |y|\,.$$

Siis itseisarvon määritelmän perusteella

$$|x + y| \;\leq\; |x| + |y|\,.$$

$\square$

Huomautus. Kolmioepäyhtälöstä käytetään usein merkintää Δ-ey.

Esimerkki 1.21. Osoitetaan, että jos $|x-1| < 2$ ja $|y-1| < 3$, niin $|x-y| < 5$. Nyt kolmioepäyhtälön nojalla (vrt. seuraus 1.10)

$$|x-y| \;=\; |(x-1)-(y-1)| \;\le\; |x-1| + |y-1| \;<\; 2+3 \;=\; 5.$$

Seuraus 1.9 (Käänteinen kolmioepäyhtälö)**.** *Olkoon $x, y \in \mathbf{R}$. Tällöin*

$$||x| - |y|| \;\le\; |x \pm y|\,.$$

Todistus. Nytkin riittää todistaa tapaus $|x+y|$. Kolmioepäyhtälön ja huomautuksen 1.1 (s. 8) nojalla

$$\begin{aligned} |y| \;&=\; |(-x) + (x+y)| \;\le\; |x| + |x+y|\,,\\ |x| \;&=\; |(-y) + (x+y)| \;\le\; |y| + |x+y|\,, \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} -(|x| - |y|) \;&\le\; |x+y|\,,\\ |x| - |y| \;&\le\; |x+y|\,. \end{aligned}$$

Siis itseisarvon määritelmän perusteella

$$||x| - |y|| \;\le\; |x+y|\,.$$

□

Seuraus 1.10. *Olkoon $x, y, z \in \mathbf{R}$. Tällöin*

$$|x-y| \;\le\; |x-z| + |y-z|\,.$$

Todistus. Kolmioepäyhtälön nojalla

$$|x-y| \;=\; |(x-z)-(y-z)| \;\le\; |x-z| + |y-z|\,.$$

□

Seuraus 1.11 (Kolmioepäyhtälön yleistys)**.** *Olkoon $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$. Tällöin*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \;\le\; \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,.$$

Todistus. Induktiolla (harjoitustehtävä).

Lause 1.12 (Cauchy-Schwarzin epäyhtälö)**.** *Olkoon* $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$. *Tällöin*

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2}_{C} \;\le\; \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)}_{A}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}_{B}. \tag{1.1}$$

Todistus. Olkoot A, B ja C kuten yllä on merkitty. Tällöin väite saa muodon

$$C^2 \le AB.$$

Neliöiden summana

$$0 \;\le\; \sum_{i=1}^{n}(a_i u + b_i v)^2 \;=\; Au^2 + 2Cuv + Bv^2 \qquad \forall u, v \in \mathbf{R}.$$

Valitaan $u = B$ ja $v = -C$. Tällöin

$$0 \;\le\; AB^2 - 2BC^2 + BC^2 \;=\; B(AB - C^2).$$

Jos nyt $B = 0$ ($B \ge 0$ aina), niin $b_i = 0$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$, joten (1.1) on voimassa.

Jos taas $B > 0$, niin $AB - C^2 \ge 0$. Siis $C^2 \le AB$.

□

1.3 Reaaliluvut

Määritellään reaaliluvut ja laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$ suoraan aksiomaattisesti.[1] Tällöin joukon $\mathbf{R}$ on täytettävä

1. kunta-aksioomat (joukon $\mathbf{R}$ algebralliset ominaisuudet),
2. järjestysaksioomat (epäyhtälöiden käsittelysäännöt),
3. täydellisyysaksiooma (käsitteen "raja-arvo" määrittely).

1.3.1 Kunta-aksioomat

Kunta-aksioomista A1–A6 seuraavat reaalilukujen algebralliset ominaisuudet. Aksioomat ovat

A1. $\forall x, y \in \mathbf{R}\colon x + y = y + x,\ xy = yx$ (vaihdantalait),

A2. $\forall x, y, z \in \mathbf{R}\colon x + (y + z) = (x + y) + z,\ x(yz) = (xy)z$ (liitäntälait),

A3. $\forall x, y, z \in \mathbf{R}\colon x(y + z) = xy + xz$ (osittelulaki),

A4. $\exists\, 0 \in \mathbf{R}\colon \forall x \in \mathbf{R}\colon x + 0 = x$ (nolla-alkio),
$\exists\, 1 \in \mathbf{R}\colon \forall x \in \mathbf{R}\colon x \cdot 1 = x$ (ykkösalkio),

A5. $\forall x \in \mathbf{R}\colon \exists (-x) \in \mathbf{R}\colon x + (-x) = 0$ (vasta-alkio),

A6. $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\colon \exists\, x^{-1} \in \mathbf{R}\colon x \cdot x^{-1} = 1$ (käänteisalkio).

Huomautus. Symbolit 0, 1, $-x$ ja x^{-1} ovat merkintöjä.

Huomautus. Jos johonkin joukkoon K liittyy kaksi sellaista laskutoimitusta (binäärioperaatiota, nk. summa ja tulo), että aksioomat A1–A6 ovat voimassa joukon K alkioille, sanotaan joukkoa K *kunnaksi*. Esimerkiksi $\mathbf{R}$ on (eräs) kunta.

Huomautus. Edellisessä huomautuksessa mainittujen laskutoimitusten yksikäsitteisten tulosten täytyy tietysti kuulua joukkoon K. Esimerkiksi joukon $\mathbf{N}$ vähennyslasku ja joukon $\mathbf{Z}$ jakolasku eivät kelpaa ko. laskutoimituksiksi.

[1] Vaihtoehtoinen tapa olisi määritellä ensin luonnolliset luvut (esimerkiksi Peanon aksioomien avulla) ja laajentaa sitten asteittain luonnollisten lukujen joukkoa.

Huomautus 1.13. Aksioomissa A1–A6 esiintyvistä binäärioperaatioista summa ja tulo saadaan edelleen operaatiot

$$\begin{aligned}
&\textit{erotus}: && x - y = x + (-y), \\
&\textit{osamäärä}: && \frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}, \text{ missä } y \neq 0, \\
&\textit{potenssi}: && x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n \text{ kpl}} \quad (n \in \mathbf{Z}_+).
\end{aligned}$$

Jos $x \neq 0$, niin voidaan lisäksi määritellä

$$x^0 = 1$$

ja

$$x^{-n} = (x^{-1})^n \qquad (n \in \mathbf{Z}_+),$$

jolloin potenssi x^n tulee määritellyksi kaikille kokonaisluvuille n (kun $x \neq 0$). Määrittely laajennetaan myöhemmin rationaali- ja reaalilukupotensseille esimerkeissä 4.23 (s. 109) ja 6.17 (s. 171).

Kunta-aksioomista seuraavat reaalilukujen summaa ja tuloa koskevat tavanomaiset laskusäännöt. Kyseiset laskusäännöt oletetaan kurssilla tunnetuksi ilman erityisempiä perusteluja, ja osaa niistä käytettiinkin jo aiemmissa luvuissa.

1.3.2 Järjestysaksioomat

Järjestysaksioomista A7–A10 seuraavat tavalliset epäyhtälöiden käsittelysäännöt. Aksioomat ovat

A7. $\forall x, y \in \mathbf{R}$: täsmälleen yksi ehdoista $x < y$, $x > y$ ja $x = y$ on voimassa,

A8. $\forall x, y \in \mathbf{R}$: $x < y \Rightarrow (\forall z \in \mathbf{R}: x + z < y + z)$,

A9. $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$: $x < y \land y < z \Rightarrow x < z$,

A10. $\forall x, y \in \mathbf{R}$: $x > 0 \land y > 0 \Rightarrow xy > 0$.

Edellä edellytetään tietenkin, että reaalilukujen joukossa **R** on määritelty järjestysrelaatio ”$<$” (= pienempi kuin).[1]

[1] Yleisimmin järjestyksiä koskevassa terminologiassa edellytetään, että järjestysrelaatio on refleksiivinen eli kukin alkio on relaatiossa itsensä kanssa. Koska ”$<$” ei ole refleksiivinen (”$\leq$” sen sijaan on), niin ”$<$” ei tällöin ole järjestysrelaatio. Sitä kutsutaankin usein tiukaksi järjestykseksi tai aidoksi järjestykseksi. Tämän kurssin kannalta asialla ei kuitenkaan ole merkitystä, ja myös relaatiota ”$<$” voidaan kutsua järjestykseksi.

Huomautus. Jos jossakin kunnassa K on määritelty relaatio ”$<$”, joka toteuttaa ehdot A7–A10, sanotaan kuntaa K *järjestetyksi kunnaksi.* Siis $\mathbf{R}$ on (eräs) järjestetty kunta ”pienempi kuin” relaatiolla.

Huomautus. Myös $\mathbf{Q}$ on järjestetty kunta ”pienempi kuin” relaatiolla.

Myös järjestysaksioomista seuraavat tavanomaiset epäyhtälöiden käsittelysäännöt oletetaan kurssilla tunnetuksi ilman erityisempiä perusteluja. Näistäkin osaa käytettiin jo aiemmissa luvuissa.

1.3.3 Täydellisyysaksiooma

Aksioomat A1–A10 eivät vielä yksikäsitteisesti määritä reaalilukujen joukkoa. Lopullisesti reaalilukujen joukko määritetään vaatimalla, että epätyhjän ylhäältä rajoitetun reaalilukujoukon ylärajoista joku on pienin (ks. määritelmä 1.7, s. 17). Tämä ominaisuus ei seuraa aksioomista A1–A10, vaan se on otettava uudeksi aksioomaksi. Kyseistä aksioomaa kutsutaan *täydellisyysaksioomaksi.*

A11. Jokaisella joukon $\mathbf{R}$ epätyhjällä ylhäältä rajoitetulla osajoukolla on pienin yläraja.

Huomautus. Järjestettyä kuntaa K, jonka jokaisella epätyhjällä ylhäältä rajoitetulla osajoukolla on pienin yläraja, sanotaan *täydelliseksi kunnaksi.* Siis $\mathbf{R}$ on täydellinen (järjestetty) kunta.

Huomautus. Rationaalilukujen joukko $\mathbf{Q}$ ei ole täydellinen kunta.

1.4 Reaalilukujen joukon täydellisyys

Luvussa 1.3.3 viitattiin jo ylhäältä rajoitetun joukon pienimpään ylärajaan. Tarkastellaan nyt kyseistä käsitettä täsmällisemmin.

Määritelmä 1.7. Olkoon $A \subseteq \mathbf{R}, A \neq \emptyset$. Jos joukon A ylärajojen joukossa on pienin, niin se on joukon A *pienin yläraja* eli *supremum* (merkitään $\sup A$).

Määritelmä 1.8. Olkoon $A \subseteq \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$. Jos joukon A alarajojen joukossa on suurin, niin se on joukon A *suurin alaraja* eli *infimum* (merkitään $\inf A$).

Huomautus. Reaalilukujoukon supremum ja infimum ovat yksikäsitteisiä (jos ovat olemassa).

Täydellisyysaksiooman (ks. luku 1.3.3) nojalla jokaisella epätyhjällä ylhäältä rajoitetulla joukon $\mathbf{R}$ osajoukolla on pienin yläraja. Vastaava tulos pätee myös suurimman alarajan suhteen.

Lause 1.14. *Jokaisella epätyhjällä alhaalta rajoitetulla joukon* $\mathbf{R}$ *osajoukolla on suurin alaraja.*

Todistus. Olkoon $A \subseteq \mathbf{R}$ jokin epätyhjä alhaalta rajoitettu joukko.

$\therefore$ $B = \{-a \mid a \in A\}$ on epätyhjä ylhäältä rajoitettu joukko.

$\therefore$ $\exists \sup B = G$ (merk.).

$\therefore$ $-G = \inf A$.

$\square$

Jos epätyhjä joukon $\mathbf{R}$ osajoukko A ei ole ylhäältä rajoitettu, voidaan merkitä $\sup A = \infty$. Jos vastaavasti epätyhjä joukon $\mathbf{R}$ osajoukko A ei ole alhaalta rajoitettu, voidaan merkitä $\inf A = -\infty$.

Lause 1.15. *Olkoot A ja B epätyhjiä joukon* $\mathbf{R}$ *osajoukkoja. Jos $A \subseteq B$, niin*

$$\inf B \ \leq\ \inf A \ \leq\ \sup A \ \leq\ \sup B.$$

Todistus. Harjoitustehtävä.

Yleisesti joukon A supremumin tai infimumin ei tarvitse kuulua joukkoon A. Jos ne kuitenkin kuuluvat joukkoon A, niin joukon A ylä- ja alarajoina ne ovat vastaavasti joukon A suurin ja pienin alkio. Tulos on voimassa myös kääntäen, mikä nähdään seuraavasta lauseesta.

Lause 1.16. *Olkoon A epätyhjä joukon $\mathbf{R}$ osajoukko.*

(a) *Jos joukossa A on suurin luku M, niin* $\sup A = M$.

(b) *Jos joukossa A on pienin luku m, niin* $\inf A = m$.

Todistus. Todistetaan kohta (a), ja jätetään kohta (b) harjoitustehtäväksi. Jos M on joukon A suurin luku, niin

$1°$ M on joukon A eräs yläraja, sillä $x \leq M$ kaikilla $x \in A$,

$2°$ M on joukon A pienin yläraja, sillä $M \leq \sup A$.

Kohdista $1°$ ja $2°$ seuraa, että $\sup A = M$. □

Huomautus. Joukon A suurinta lukua merkitään $\max A$ ja pienintä lukua $\min A$. Myös $\max A$ ja $\min A$ ovat yksikäsitteisiä, jos ne ovat olemassa.

Esimerkki 1.22. Määritetään $\inf A$ ja $\sup A$, kun

$$A = \left\{ x \in \mathbf{R} \,\middle|\, |x-3| \leq 2 \right\}.$$

Koska

$$|x-3| \leq 2 \;\Leftrightarrow\; 1 \leq x \leq 5,$$

niin $\min A = 1$ ja $\max A = 5$ (eli joukolla A on pienin ja suurin alkio). Täten lauseen 1.16 nojalla

$$\inf A = \min A = 1 \quad \text{ja} \quad \sup A = \max A = 5.$$

Esimerkki 1.23. Osoitetaan, että $\sup A = 1$ ja $\inf A = 0$, kun

$$A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{Z}_+ \right\}.$$

Tarkastellaan ensin infimumia. Koska

$$1 - \frac{1}{n} \;\geq\; 0 \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+$$

ja $0 \in A$, niin $0 = \min A$. Siis lauseen 1.16b nojalla $\inf A = \min A = 0$.

Tarkastellaan sitten supremumia. Osoitetaan ensin, että 1 on joukon A yläraja, ja sitten vastaoletuksen avulla, että 1 on joukon A ylärajoista pienin.

1° Koska $1 - \dfrac{1}{n} < 1$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$, niin 1 on eräs joukon A yläraja.

2° Käytetään epäsuoraa todistusmenetelmää. Tehdään siis vastaoletus: oletetaan, että 1 ei ole joukon A pienin yläraja.

$\therefore$ On olemassa joukon A yläraja $1 - t$, missä $t > 0$ ($t \in \mathbf{R}$).

$\therefore\ 1 - \dfrac{1}{n} \ \leq\ 1 - t \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$

$\therefore\ t \ \leq\ \dfrac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$

$\therefore\ n \ \leq\ \dfrac{1}{t} \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$

$\therefore$ Ristiriita, sillä n ei ole rajoitettu.

Kohdista 1° ja 2° seuraa supremumin määritelmän perusteella, että $\sup A = 1$.

Lause 1.17. *Olkoon A epätyhjä joukon $\mathbf{R}$ osajoukko. Tällöin*

$$\text{(a) } \sup A = G \ \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & \forall x \in A\colon x \leq G, \\ \text{(ii)} & \forall \varepsilon > 0\colon \exists\, x \in A\colon x > G - \varepsilon, \end{cases}$$

$$\text{(b) } \inf A = g \ \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & \forall x \in A\colon x \geq g, \\ \text{(ii)} & \forall \varepsilon > 0\colon \exists\, x \in A\colon x < g + \varepsilon. \end{cases}$$

Todistus. Todistetaan kohta (a), ja jätetään kohta (b) harjoitustehtäväksi. Tarkastellaan ensin suuntaa '$\Leftarrow$', ja oletetaan, että ehdot (i) ja (ii) ovat voimassa. Osoitetaan, että G on joukon A pienin yläraja.

1° Kohdan (i) nojalla G on eräs joukon A yläraja.

2° Tehdään vastaoletus: oletetaan, että G ei ole joukon A pienin yläraja.

$\therefore$ On olemassa joukon A yläraja $G - \varepsilon$, missä $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbf{R}$).

$\therefore\ \forall x \in A\colon x \leq G - \varepsilon$

$\therefore$ Ristiriita, sillä ehdon (ii) nojalla $\exists\, x \in A\colon x > G - \varepsilon$.

Kohdista 1° ja 2° seuraa supremumin määritelmän perusteella, että $\sup A = G$.

Tarkastellaan sitten suuntaa '$\Rightarrow$', ja oletetaan, että $\sup A = G$. Osoitetaan, että ehdot (i) ja (ii) ovat voimassa.

(i) Koska G on joukon A yläraja, niin $\forall x \in A \colon x \leq G$.

(ii) Tehdään vastaoletus: oletetaan, että $\exists \varepsilon > 0 \colon \forall x \in A \colon x \leq G - \varepsilon$.

$\therefore$ $G - \varepsilon$ $(< G)$ on joukon A yläraja.

$\therefore$ Ristiriita, sillä $\sup A = G$.

$\square$

Esimerkki 1.24. Olkoon

$$A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{Z}_+ \right\}.$$

Osoitetaan lausetta 1.17 käyttäen, että $\sup A = 1$ (vrt. esimerkki 1.23).

1° Kuten esimerkissä 1.23.

2° Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$.

Oletetaan, että $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ $(n \in \mathbf{Z}_+)$, ja merkitään $x = 1 - \dfrac{1}{n}$ $(\in A)$.

$\therefore$ $\varepsilon > \dfrac{1}{n}$

$\therefore$ $x = 1 - \dfrac{1}{n} > 1 - \varepsilon$

$\therefore$ On olemassa (ainakin yksi) sellainen joukon A alkio x, että $x > 1 - \varepsilon$.

Kohdista 1° ja 2° seuraa lauseen 1.17 perusteella, että $\sup A = 1$.

Huomautus. Esimerkin 1.24 kaltaisissa tilanteissa edetään usein epsilonin valinnan jälkeen (tietysti on oletettava, että $n \in \mathbf{Z}_+$)

$$\begin{aligned} x > 1 - \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \varepsilon > \frac{1}{n} \\ &\Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

mikä toteutuu, jos n on riittävän suuri. Jos siis on valittu mielivaltainen $\varepsilon > 0$, niin haluttu $x > 1 - \varepsilon$ löytyy, kun vain valitaan sellainen $x = 1 - \frac{1}{n}$, että $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Näin voidaan menetellä, jos vaadittu ekvivalenssiketju saadaan aikaiseksi.

Esimerkki 1.25. Määritetään $\sup A$, kun

$$A = \left\{ y \in \mathbf{R} \;\middle|\; y = \frac{2x-1}{x+1},\ x > 0 \right\}.$$

Käytetään lausetta 1.17.

1° Koska

$$\frac{2x-1}{x+1} = \frac{(2x+2)-3}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1} < 2$$

kaikilla $x > 0$, niin 2 on joukon A yläraja.

2° Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Oletetaan, että $x > 0$. Koska

$$\begin{aligned} y > 2-\varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1} > 2-\varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \varepsilon > \frac{3}{x+1} \\ &\Leftrightarrow \quad x+1 > \frac{3}{\varepsilon} \\ &\Leftrightarrow \quad x > -1 + \frac{3}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

niin valitsemalla x siten,[1] että $x > -1 + \frac{3}{\varepsilon}$, löydetään sellainen $y \in A$, että $y > 2 - \varepsilon$.

Kohdista 1° ja 2° seuraa lauseen 1.17 perusteella, että $\sup A = 2$.

Seuraava lause tuntuu itsestään selvältä. Arkhimedeen ominaisuus ei kuitenkaan seuraa reaalilukujen aksioomista A1–A10, joten sen todistamisessa tarvitaan nyt täydellisyysaksioomaa.

Lause 1.18 (Arkhimedeen lause)**.** *Jos $x, y \in \mathbf{R}_+$, on olemassa sellainen $n \in \mathbf{Z}_+$, että $nx > y$.*

Todistus. Olkoon $x, y \in \mathbf{R}_+$. Tehdään vastaoletus: $\forall n \in \mathbf{Z}_+ \colon nx \leq y$.

$\therefore$ Joukko $E = \{nx \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$ on ylhäältä rajoitettu.

$\therefore$ $\exists \sup E = G$ (merk.).

$\therefore$ Lauseen 1.17 nojalla $\forall \varepsilon > 0 \colon \exists n \in \mathbf{Z}_+ \colon nx > G - \varepsilon$.

$\therefore$ $\exists n \in \mathbf{Z}_+ \colon nx > G - x$.

$\therefore$ $(n+1)x > G$, missä on ristiriita. $\square$

[1] Koska oletettiin, että $x > 0$, niin itse asiassa valitaan $x > \max\{0, -1 + \frac{3}{\varepsilon}\}$.

Seuraus 1.19. *Kahden reaaliluvun a ja b ($a \neq b$) välissä on aina rationaaliluku.*

Todistus. Voidaan olettaa, että $0 < a < b$. Tällöin Arkhimedeen lauseen nojalla on olemassa $n \in \mathbf{Z}_+$ siten, että

$$n(b-a) > 1, \quad \text{ts.} \quad b - a > \frac{1}{n}.$$

Edelleen Arkhimedeen lauseen nojalla on olemassa $m \in \mathbf{Z}_+$ siten, että

$$m \cdot \frac{1}{n} \ \geq \ b.$$

Olkoon lisäksi m pienin tällaisista luvuista, jolloin

$$\frac{m-1}{n} \ < \ b.$$

Tällöin

$$\frac{m-1}{n} \ = \ \frac{m}{n} - \frac{1}{n} \ > \ b - (b-a) \ = \ a,$$

joten

$$a \ < \ \underbrace{\frac{m-1}{n}}_{\in \mathbf{Q}} \ < \ b.$$

□

Seuraus 1.20. *Kahden erisuuren reaaliluvun välissä on aina irrationaaliluku.*

Todistus. Harjoitustehtävä.

Seuraus 1.21. *Kahden erisuuren reaaliluvun välissä on ääretön määrä rationaalilukuja ja ääretön määrä irrationaalilukuja.*

Todistus. Harjoitustehtävä.

Huomautus 1.22. Edellä olevat seuraukset tarkoittavat, että joukot $\mathbf{Q}$ ja $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ovat molemmat *tiheitä* reaalilukujen joukossa.

2 Lukujonon raja-arvo

2.1 Määritelmä ja perusominaisuuksia

Lukujono (x_n) on lukujen

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

muodostama jono, missä $x_n \in \mathbf{R}$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$.[1] Lukujonon määrittelyssä ei ole oleellista, että lukujonon indeksointi alkaa ykkösestä tai että jono on määritelty kaikilla indekseillä $n \in \mathbf{Z}_+$. Näin ollen lukujonoksi kutsutaan myös jonoa

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$$

tai joukon $\mathbf{Z}_+$ (äärettömissä) osajoukoissa muodostettuja jonoja kuten

$$x_4, x_6, x_8, \ldots$$

Lukujonoa

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots,$$

missä $n_1, n_2, \ldots \in \mathbf{Z}_+$, $n_1 < n_2 < \ldots$, sanotaan lukujonon $x_1, x_2, \ldots$ *osajonoksi.*

Huomautus. Lukujono (x_n) on eri asia kuin joukko $\{x_n \,|\, n \in \mathbf{Z}_+\}$. Esimerkiksi jos $x_n = (-1)^n$, niin

$$(x_n) = -1,\ 1, -1,\ 1, -1, \ldots$$

ja

$$\{x_n \,|\, n \in \mathbf{Z}_+\} = \{-1, 1\}\,.$$

Huomautus. Lukujonon osajonot ovat tietenkin myös itse lukujonoja.

Esimerkki 2.1. Olkoon $x_n = 1/n$. Tällöin

$$(x_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

on lukujono, jonka osajonoja ovat muun muassa

$$(x_{2n}) = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots$$

ja

$$(x_{(10n)^2}) = \frac{1}{100}, \frac{1}{400}, \frac{1}{900}, \ldots$$

[1] Täsmällisesti lukujono on kuvaus $\mathbf{Z}_+ \to \mathbf{R}$.

Määritelmä 2.1. Lukujonolla (x_n) on *raja-arvo* $x \in \mathbf{R}$, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $n_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+$, että

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

aina, kun $n > n_\varepsilon$. Tällöin sanotaan, että lukujono (x_n) *suppenee* kohti reaalilukua x, ja merkitään

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Jos lukujono (x_n) ei suppene kohti mitään reaalilukua x, sanotaan, että jono (x_n) *hajaantuu*.

Huomautus 2.1. Lukujonon raja-arvon määritelmässä ei ole oleellista, että ehdoissa $n > n_\varepsilon$ ja $|x_n - x| < \varepsilon$ relaatioiksi on valittu ”suurempi kuin” ja ”pienempi kuin”. Aivan yhtä hyvin määritelmässä olisi voinut olla $n \geq n_\varepsilon$ tai $|x_n - x| \leq \varepsilon$.

Jos nimittäin vaadittu ehto pätee kaikille $n \geq n_\varepsilon$, se pätee tietysti myös kaikille $n > n_\varepsilon$. Jos taas ehto pätee kaikille $n > n_\varepsilon$, voidaan valita uusi rajaluku $n'_\varepsilon = n_\varepsilon + 1$, jolloin ehto pätee kaikille $n \geq n'_\varepsilon$.

Jos vastaavasti $|x_n - x| < \varepsilon$, niin tietysti myös $|x_n - x| \leq \varepsilon$. Jos taas ehto $|x_n - x| \leq \varepsilon$ pätee kaikille $\varepsilon > 0$, niin ehto pätee myös kaikille luvuille $\varepsilon' = \varepsilon/2 > 0$. Siis

$$|x_n - x| \ \leq\ \varepsilon' \ =\ \varepsilon/2 \ <\ \varepsilon$$

kaikille $\varepsilon > 0$.

Huomautus. Vaihtoehtoisia merkintätapoja lukujonon suppenemiselle ovat esimerkiksi

$$x_n \to x, \text{ kun } n \to \infty,$$

ja

$$\lim x_n = x.$$

Jälkimmäistä tapaa käytettäessä on oltava selvää, että $n \to \infty$.

Huomautus 2.2. Koska $|x_n - 0| = ||x_n| - 0|$, niin lukujonon raja-arvon määritelmästä seuraa suoraan, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0.$$

Vastaava tulos ei välttämättä päde, jos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$ (harjoitustehtävä).

Huomautus 2.3. Lukujonon raja-arvon määritelmä voidaan ilmoittaa myös muodossa

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\colon \exists\, n_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+\colon\ |x_n - x| < \varepsilon \ \text{ aina, kun } n > n_\varepsilon,$$

tai

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\colon \exists\, n_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+\colon x_n \in \mathrm{U}_\varepsilon(x) \ \text{ aina, kun } n > n_\varepsilon.$$

Huomautus. Lukujonolla (x_n) on raja-arvo x täsmälleen silloin, kun jostakin indeksin n arvosta n_ε lähtien kaikki jonon termit x_n kuuluvat raja-arvon x ympäristöön $\mathrm{U}_\varepsilon(x)$ (eli väliin $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$).

Huomautus. Joskus ehdon

$$|x_n - x| < \varepsilon \ \text{ aina, kun } n > n_\varepsilon,$$

sijasta käytetään muotoilua

$$n > n_\varepsilon \ \Rightarrow\ |x_n - x| < \varepsilon.$$

Esimerkki 2.2. Olkoon $x_n = a$ ($a \in \mathbf{R}$) kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$. Osoitetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n \;=\; a.$$

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Tällöin

$$|x_n - a| \;=\; |a - a| \;=\; 0 \;<\; \varepsilon$$

kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$. Siis lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla

$$\lim_{n\to\infty} x_n \;=\; a.$$

Huomautus. Ensin valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Valinnan jälkeen ε on kiinteä.

Esimerkki 2.3. Osoitetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \;=\; 0.$$

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Merkitään[1] $n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ ($\in \mathbf{Z}_+$), ja valitaan sellainen $n \in \mathbf{Z}$, että $n > n_\varepsilon$. Tällöin $n > \frac{1}{\varepsilon}$, joten

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| \;=\; \frac{1}{n} \;<\; \varepsilon.$$

[1] Kattofunktio $\lceil x \rceil$ = pienin kokonaisluku, joka on suurempi tai yhtäsuuri kuin x. Jos ei haluta käyttää kattofunktiota, voidaan käyttää myös muotoiluja ”Olkoon n_ε pienin sellainen kokonaisluku, että $n_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon}$” tai ”Valitaan sellainen $n_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+$, että $n_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon}$”.

Siis jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $n_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+$, että

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| \;<\; \varepsilon$$

aina, kun $n > n_\varepsilon$. Siis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \;=\; 0.$$

Esimerkki 2.4. Osoitetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$$

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Merkitään $n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil$ $(\in \mathbf{Z}_+)$, ja valitaan sellainen $n \in \mathbf{Z}$, että $n > n_\varepsilon$. Tällöin $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$, joten $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ ja edelleen

$$\begin{aligned}
\left|(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 0\right| &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\
&= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&< \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Vaadittu tulos seuraa nyt lukujonon raja-arvon määritelmästä.

Edellä olevan kaltaisessa päättelyssä edetään usein suoraviivaisemmin valitsemalla ensin mielivaltainen $\varepsilon > 0$ ja päättelemällä sitten, että

$$\left|(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 0\right| \;=\; \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \;=\; \cdots \;<\; \frac{1}{\sqrt{n}} \;<\; \varepsilon,$$

kun $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$, mistä vaadittu tulos seuraa lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla. Jossakin vaiheessa on tietysti tehtävä tarvittavat oletukset (esimerkiksi yllä $n \in \mathbf{Z}_+$).

Näin voidaan menetellä, sillä tällöin on osoitettu, että vaadittu itseisarvoehto toteutuu, jos n on riittävän suuri $(> \frac{1}{\varepsilon^2})$. Koska kokonaislukujen joukko ei ole ylhäältä rajoitettu, voidaan aina valita sellainen luku $n_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+$ (esim. $n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil$), että itseisarvoehto toteutuu aina, kun $n > n_\varepsilon$. Luvun n_ε valintaa ei nyt vain ole kirjoitettu näkyviin.

Esimerkki 2.5. Osoitetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2+1} = \frac{1}{2}.$$

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$, ja oletetaan, että $n \in \mathbf{Z}_+$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n^2+n}{2n^2+1} - \frac{1}{2}\right| &= \left|\frac{2n^2+2n-2n^2-1}{2(2n^2+1)}\right| = \frac{2n-1}{2(2n^2+1)} \\
&< \frac{2n}{2(2n^2+1)} = \frac{n}{2n^2+1} < \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

kun $n > \frac{1}{2\varepsilon}$. Vaadittu tulos seuraa nyt lukujonon raja-arvon määritelmästä.

Esimerkki 2.6. Osoitetaan, että jos $0 < a < 1$ ($a \in \mathbf{R}$), niin

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0.$$

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Koska $0 < a < 1$, niin a voidaan esittää muodossa

$$a = \frac{1}{1+h},$$

missä $h > 0$. Tällöin Bernoullin epäyhtälön (ks. esimerkki 1.5, s. 3) nojalla

$$|a^n - 0| = a^n = \frac{1}{(1+h)^n} \le \frac{1}{1+nh} \le \frac{1}{nh} < \varepsilon,$$

kun $n > \frac{1}{h\varepsilon}$. Vaadittu tulos seuraa nyt lukujonon raja-arvon määritelmästä (vrt. esimerkki 2.14, s. 43).

Esimerkki 2.7. Olkoon $x_n = 1 - \cos(\pi n)$ ($n \in \mathbf{Z}_+$). Tällöin[1]

$$x_n = \begin{cases} 2, & \text{kun } n \text{ on pariton,} \\ 0, & \text{kun } n \text{ on parillinen.} \end{cases}$$

Osoitetaan, että $\nexists \lim_{n\to\infty} x_n$. Tehdään vastaoletus: $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = x$.

$\therefore$ $\exists n_1 \in \mathbf{Z}_+ \colon |x_n - x| < 1$ aina, kun $n > n_1$.

$\therefore$ $|2-x| < 1$ ja $|x| = |0-x| < 1$.

$\therefore$ $2 = |2-x+x| \le |2-x| + |x| < 1+1 = 2$.

$\therefore$ Ristiriita.

[1]Kurssilla oletetaan tunnetuksi trigonometriset funktiot sini, kosini, tangentti ja kotangentti sekä niiden perusominaisuudet.

Esitetään sitten muutamia lukujonoja koskevia perustuloksia. Ensin yksikäsitteisyys.

Lause 2.4. *Suppenevan lukujonon raja-arvo on yksikäsitteinen.*

Todistus. Tehdään vastaoletus: lukujonolla (x_n) on raja-arvot x ja y, $x \neq y$. Tällöin lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla

$$\begin{aligned} \exists\, n_1 \in \mathbf{Z}_+ \colon\ |x_n - x| &< \tfrac{1}{2}\,|x-y| \qquad \forall n > n_1, \\ \exists\, n_2 \in \mathbf{Z}_+ \colon\ |x_n - y| &< \tfrac{1}{2}\,|x-y| \qquad \forall n > n_2. \end{aligned}$$

Olkoon nyt $n > \max\{n_1, n_2\}$. Tällöin

$$\begin{aligned} |x-y| &= |(x-x_n) + (x_n - y)| \\ &\leq |x - x_n| + |x_n - y| \\ &< \tfrac{1}{2}\,|x-y| + \tfrac{1}{2}\,|x-y| \\ &= |x-y|\,, \end{aligned}$$

missä on ristiriita. □

Suppenevan lukujonon jokainen osajono suppenee kohti samaa raja-arvoa kuin alkuperäinen lukujono.

Lause 2.5. *Jos* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *ja* (x_{n_k}) *on lukujonon* (x_n) *osajono, niin* $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Todistus. Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Jos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

niin lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+$, että

$$|x_n - x| < \varepsilon \qquad \forall n > n_\varepsilon.$$

Erityisesti jos $n_k > n_\varepsilon$, niin

$$|x_{n_k} - x| < \varepsilon.$$

Koska osajonon (x_{n_k}) indeksi kasvaa rajatta, on olemassa sellainen $k_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+$, että

$$n_k > n_\varepsilon \qquad \forall k > k_\varepsilon.$$

Tällöin

$$|x_{n_k} - x| < \varepsilon \qquad \forall k > k_\varepsilon,$$

joten lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x.$$

□

Lauseen 2.5 seurauksena saadaan välittömästi seuraava tulos, jota voidaan käyttää lukujonon hajaantumisen osoittamiseen.

Seuraus 2.6. *Jos lukujonolla* (x_n) *on kaksi osajonoa, jotka suppenevat kohti eri raja-arvoa (tai osajono, joka hajaantuu), niin* (x_n) *hajaantuu.*

Esimerkki 2.8. Olkoon

$$x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1} \quad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

Tällöin lukujono (x_n) hajaantuu, sillä jos $k \in \mathbf{Z}_+$, niin

$$x_{2k} = \frac{2k}{2k+1} \to 1,$$

kun $k \to \infty$, ja

$$x_{2k-1} = -\frac{2k-1}{2k} \to -1,$$

kun $k \to \infty$. Raja-arvojen täsmällinen perustelu jätetään harjoitustehtäväksi.

Seuraavaksi osoitetaan, että suppeneva lukujono on rajoitettu. Ensin kuitenkin määritellään, mitä rajoitetulla lukujonolla tarkoitetaan.

Määritelmä 2.2. Jos joukko $\{x_n\}$ on rajoitettu, sanotaan, että myös vastaava lukujono (x_n) on *rajoitettu*. Edelleen jos $\{x_n\}$ on ylhäältä rajoitettu, niin jono (x_n) on *ylhäältä rajoitettu*, ja jos $\{x_n\}$ on alhaalta rajoitettu, niin jono (x_n) on *alhaalta rajoitettu*.

Huomautus 2.7. Määritelmien 1.1 ja 1.2 (s. 5) sekä seurauksen 1.7 (s. 9) perusteella lukujono (x_n) on

- ylhäältä rajoitettu, jos $\exists\, M \in \mathbf{R} \colon \forall n \in \mathbf{Z}_+ \colon x_n \leq M$,
- alhaalta rajoitettu, jos $\exists\, m \in \mathbf{R} \colon \forall n \in \mathbf{Z}_+ \colon x_n \geq m$,
- rajoitettu, jos $\exists\, M \in \mathbf{R} \colon \forall n \in \mathbf{Z}_+ \colon |x_n| \leq M$.

Yllä viimeinen ehto voidaan esittää myös muodossa

$$\exists\, M > 0 \colon \forall n \in \mathbf{Z}_+ \colon |x_n| \leq M \quad \text{tai} \quad \exists\, M > 0 \colon \forall n \in \mathbf{Z}_+ \colon |x_n| < M.$$

Lause 2.8. *Jos* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$*, niin lukujono* (x_n) *on rajoitettu.*

Todistus. Jos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, niin lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa sellainen $n_1 \in \mathbf{Z}_+$, että

$$|x_n - x| < 1 \qquad \forall n > n_1.$$

Tällöin

$$|x_n| \;=\; |x + (x_n - x)| \;\leq\; |x| + |x_n - x| \;<\; |x| + 1 \qquad \forall n > n_1.$$

Merkitään $M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_1}|, |x| + 1\}$. Tällöin

$$|x_n| \leq M \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+,$$

joten lukujono (x_n) on rajoitettu. □

Huomautus. Lause 2.8 ei ole kääntäen voimassa (ks. esimerkki 2.8, s. 29).

Lause 2.9. *Olkoon* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$*.*

(a) *Jos* $\exists\, n_0 \in \mathbf{Z}_+ \colon \forall n > n_0 \colon x_n \leq M$*, niin* $x \leq M$*.*

(b) *Jos* $\exists\, n_0 \in \mathbf{Z}_+ \colon \forall n > n_0 \colon x_n \geq m$*, niin* $x \geq m$*.*

Todistus. Todistetaan kohta (a), ja jätetään kohta (b) harjoitustehtäväksi. Oletetaan siis, että kohdan (a) oletukset ovat voimassa. Tehdään vastaoletus: $x > M$. Tällöin $x - M > 0$, joten huomautuksen 2.3 (s. 25) nojalla

$$\exists\, n_1 \in \mathbf{Z}_+ \colon x_n \in \mathrm{U}_{x-M}(x) \qquad \forall n > n_1.$$

Valitaan nyt $n \in \mathbf{Z}_+$ siten, että $n > \max\{n_0, n_1\}$. Tällöin

$$x_n \in \mathrm{U}_{x-M}(x) \quad \text{eli} \quad x_n \in \,]x - (x - M), x + (x - M)[\; = \;]M, x + (x - M)[\,.$$

Siis $x_n > M$, missä on ristiriita (sillä $x_n \leq M$).

□

Huomautus. Vaikka

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{ja} \quad x_n < M \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+,$$

niin silti saattaa olla $x = M$. Vastaavasti vaikka

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{ja} \quad x_n > m \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+,$$

niin silti saattaa olla $x = m$.

Lause 2.10. *Jos* $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$, *niin on olemassa sellainen* $n_0 \in \mathbf{Z}_+$, *että*

$$|x_n| > \frac{|x|}{2}$$

kaikilla $n > n_0$.

Todistus. Jos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ja $x \neq 0$, niin lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbf{Z}_+$, että

$$|x_n - x| < \frac{|x|}{2} \qquad \forall n > n_0.$$

Tällöin

$$|x| \;=\; |x_n - (x_n - x)| \;\leq\; |x_n| + |x_n - x| \;<\; |x_n| + \frac{|x|}{2} \qquad \forall n > n_0,$$

joten

$$|x_n| \;>\; |x| - \frac{|x|}{2} \;=\; \frac{|x|}{2} \qquad \forall n > n_0.$$

□

Lause 2.11. *Jos* $\lim_{n\to\infty} x_n = x > 0$, *niin on olemassa sellainen* $n_0 \in \mathbf{Z}_+$, *että* $x_n > 0$ *kaikilla* $n > n_0$.

Todistus. Harjoitustehtävä.

2.2 Laskusääntöjä

Esitetään seuraavaksi muutamia lauseita, jotka helpottavat lukujonojen raja-arvojen määrittämistä käytännön tilanteissa. Ennen varsinaisia lauseita esitetään yksi todistuksia helpottava aputulos.

Usein raja-arvoa koskevissa todistuksissa ensin valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$ ja sitten osoitetaan, että

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

aina, kun n on riittävän suuri. Tällöin lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Tällaisissa todistuksissa ei ole välttämätöntä saada lopulliseksi arvioksi juuri lukua ε, vaan riittää saada luku ε kerrottuna jollakin positiivisella *vakiolla*. Oleellista on, että vakio ei riipu luvusta ε tai indeksistä n.

Lause 2.12. *Olkoon $a > 0$ ($a \in \mathbf{R}$). Oletetaan, että jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $n_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+$, että*

$$|x_n - x| < a \cdot \varepsilon$$

aina, kun $n > n_\varepsilon$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Todistus. Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Merkitään $\varepsilon' = \varepsilon/a$. Koska $a > 0$, niin $\varepsilon' > 0$. Jos lauseen oletukset ovat voimassa, niin tällöin on olemassa sellainen luku $n_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+$, että

$$|x_n - x| \;<\; a \cdot \varepsilon' \;=\; a \cdot (\varepsilon/a) \;=\; \varepsilon$$

aina, kun $n > n_\varepsilon$, Väite seuraa nyt lukujonon raja-arvon määritelmästä. □

Huomautus. Toistetaan jo luvussa 2.1 (s. 25) esitetty huomautus. Ensin valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Valinnan jälkeen ε on kiinteä.

Tutkitaan sitten suppenevien lukujonojen (x_n) ja (y_n) summaa (x_n+y_n), erotusta $(x_n - y_n)$ ja tuloa $(x_n y_n)$ sekä lukujonon kertomista vakiolla.

Lause 2.13. *Olkoon $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ja $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Tällöin*

(i) $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = x - y$,

(iii) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = xy$,

(iv) $\lim_{n\to\infty}(kx_n) = kx \quad (k \in \mathbf{R})$.

Todistus. Väitteen (ii) todistus jätetään harjoitustehtäväksi (vrt. kohdan (i) todistus), ja väite (iv) seuraa kohdasta (iii) valitsemalla jonoksi (y_n) vakiojono $k, k, \ldots$ Kohtien (i) ja (iii) todistuksissa hyödynnetään lausetta 2.12.

Valitaan siis mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Koska $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ja $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, niin lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla

$$\begin{aligned} \exists\, n_1 \in \mathbf{Z}_+ \colon\ |x_n - x| &< \varepsilon \qquad \forall n > n_1, \\ \exists\, n_2 \in \mathbf{Z}_+ \colon\ |y_n - y| &< \varepsilon \qquad \forall n > n_2. \end{aligned}$$

Todistetaan ensin kohta (i). Olkoon nyt $n > \max\{n_1, n_2\}$. Tällöin

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x + y)| &= |(x_n - x) + (y_n - y)| \\ &\le |x_n - x| + |y_n - y| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon, \end{aligned}$$

joten väite (i) seuraa lauseesta 2.12.

Tarkastellaan sitten väitettä (iii). Koska lukujono (x_n) suppenee, niin (x_n) on rajoitettu (lause 2.8, s. 30). Täten huomautuksen 2.7 (s. 29) nojalla on olemassa sellainen $M > 0$, että

$$|x_n| \le M \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

Oletetaan lisäksi, että $n > \max\{n_1, n_2\}$. Tällöin

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \\ &= |x_n(y_n - y) + y(x_n - x)| \\ &\le |x_n(y_n - y)| + |y(x_n - x)| \\ &= |x_n|\,|y_n - y| + |y|\,|x_n - x| \\ &< |x_n| \cdot \varepsilon + |y| \cdot \varepsilon \\ &= (|x_n| + |y|) \cdot \varepsilon \\ &\le (M + |y|) \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Koska $M + |y| > 0$ on vakio, väite (iii) seuraa lauseesta 2.12. $\square$

Lause 2.13 voidaan todistaa myös käyttämättä lausetta 2.12. Tällöin on vain kohdassa (i) valittava n_1 ja n_2 siten, että

$$|x_n - x| < \varepsilon/2 \quad \text{ja} \quad |y_n - y| < \varepsilon/2.$$

Kohdassa (iii) vastaava ehto on

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{M + |y|} \quad \text{ja} \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{M + |y|}.$$

Kohdassa (iii) valinnat voidaan myös eriyttää ja valita n_1 siten, että[1]

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2(|y| + 1)},$$

ja n_2 siten, että

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
|x_n|\,|y_n - y| + |y|\,|x_n - x| &< |x_n| \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |y| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|y| + 1)} \\
&\le \frac{M}{2M} \cdot \varepsilon + \frac{|y|}{|y| + 1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\
&\le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Seuraus 2.14. *Olkoon*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \textit{ja} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Jos tällöin on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbf{Z}_+$, *että* $x_n \le y_n$ *kaikilla* $n > n_0$, *niin* $x \le y$.

Todistus. Lauseen 2.13 kohdan (ii) nojalla

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = x - y.$$

Lisäksi $x_n - y_n \le 0$ kaikilla $n > n_0$, joten lauseen 2.9 (s. 30) nojalla $x - y \le 0$. □

Huomautus. Vaikka $x_n < y_n$ kaikilla $n > n_0$ (seurauksessa 2.14), niin silti ei välttämättä päde $x < y$ (ts. voi olla $x = y$).

[1] Nimittäjään on valittava vakion $2|y|$ sijasta $2(|y| + 1)$, sillä y voi olla 0.

Jos lukujonon (y_n) termit ovat nollasta eroavia, voidaan tarkastella myös lukujonojen (x_n) ja (y_n) osamäärää.

Lause 2.15. *Olkoon* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *ja* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$*. Jos tällöin* $y \neq 0$ *ja* $y_n \neq 0$ *kaikilla* $n \in \mathbf{Z}_+$*, niin*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}.$$

Todistus. Osoitetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}.$$

Tällöin väite seuraa lauseen 2.13 kohdasta (iii). Hyödynnetään taas lausetta 2.12.

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Koska $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, niin lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa $n_1 \in \mathbf{Z}_+$ siten, että

$$|y_n - y| < \varepsilon \qquad \forall n > n_1.$$

Koska $y \neq 0$, niin lauseen 2.10 (s. 31) perusteella on lisäksi olemassa sellainen $n_2 \in \mathbf{Z}_+$, että

$$|y_n| \; > \; \frac{|y|}{2} \; > \; 0 \qquad \forall n > n_2.$$

Olkoon nyt $n > \max\{n_1, n_2\}$. Tällöin

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y} \right| \; = \; \frac{|y - y_n|}{|y_n| \cdot |y|} \; < \; \frac{|y - y_n|}{\frac{|y|}{2} \cdot |y|} \; = \; \frac{2}{|y|^2} \cdot |y_n - y| \; < \; \frac{2}{y^2} \cdot \varepsilon.$$

Koska $\dfrac{2}{y^2} > 0$ on vakio, väite seuraa lauseesta 2.12. $\square$

Jos mikään lukujonon (x_n) termi ei ole negatiivinen, voidaan tarkastella myös lukujonon (x_n) neliöjuurta.

Lause 2.16. *Olkoon* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *ja* $x_n \geq 0$ *kaikilla* $n \in \mathbf{Z}_+$*. Tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{x}.$$

Todistus. Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Todistetaan väite kahdessa osassa. Oletetaan ensin, että $x > 0$. Koska $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, niin lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella on olemassa $n_1 \in \mathbf{Z}_+$ siten, että

$$|x_n - x| < \varepsilon \qquad \forall n > n_1.$$

Olkoon nyt $n > n_1$. Koska $x > 0$, niin

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}\right| &= \frac{\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}\right|\left|\sqrt{x_n} + \sqrt{x}\right|}{\left|\sqrt{x_n} + \sqrt{x}\right|} \\
&= \frac{|x_n - x|}{\left|\sqrt{x_n} + \sqrt{x}\right|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} \cdot |x_n - x| \\
&< \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \varepsilon.
\end{aligned}$$

Koska $\dfrac{1}{\sqrt{x}} > 0$ on vakio, väite seuraa lauseesta 2.12.

Oletetaan sitten, että $x = 0$. Tällöin siis $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, joten lukujonon raja-arvon määritelmän ja ehdon $x_n \geq 0$ nojalla on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbf{Z}_+$, että

$$0 \leq x_n < \varepsilon^2 \qquad \forall n > n_0.$$

Olkoon nyt $n > n_0$. Tällöin

$$0 \leq \sqrt{x_n} < \varepsilon$$

ja edelleen

$$|\sqrt{x_n} - 0| < \varepsilon,$$

mistä väite seuraa lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella. □

Huomautus. Lauseissa 2.15 ja 2.16 ei ole oleellista, että lukujono on määritelty kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$. Oleellista on, että ehdot $y_n \neq 0$ ja $x_n \geq 0$ pätevät kaikille lukujonon alkioille.

Esimerkki 2.9. Olkoon

$$x_n = \frac{2n^2 - n}{n^2 + 3n + 3} \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

Tällöin lukujonon (x_n) raja-arvoksi saadaan

$$\frac{2n^2 - n}{n^2 + 3n + 3} = \frac{n^2(2 - \frac{1}{n})}{n^2(1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2})} = \frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2}} \to \frac{2 - 0}{1 + 0 + 0} = 2, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Yleensä asiaa ei tarvitse tämän enempää perustella, mutta käydään tehdyt päättelyt esimerkin vuoksi vielä yksityiskohtaisesti läpi (yllä on käytetty hyväksi esimerkkejä 2.2 (s. 25) ja 2.3 (s. 25) sekä lauseita 2.13 ja 2.15).

Ottamalla n^2 yhteiseksi tekijäksi ja supistamalla yhteinen tekijä pois saadaan

$$x_n \;=\; \frac{2n^2-n}{n^2+3n+3} \;=\; \frac{n^2(2-\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2})} \;=\; \frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

Esimerkin 2.3 (s. 25) nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

joten lauseen 2.13 nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \;=\; \lim_{n\to\infty} \Big(3 \cdot \frac{1}{n}\Big) \;=\; 3 \cdot 0 \;=\; 0$$

ja edelleen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} \;=\; \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{n} \cdot \frac{3}{n}\Big) \;=\; 0 \cdot 0 \;=\; 0.$$

Koska vakiojonon raja-arvo on kyseinen vakio (esimerkki 2.2, s. 25), saadaan edelleen lauseen 2.13 nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \Big(2 - \frac{1}{n}\Big) \;=\; 2 - 0 \;=\; 2$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2}\Big) \;=\; 1 + 0 + 0 \;=\; 1.$$

Jälkimmäisessä tapauksessa lausetta 2.13 on itse asiassa käytetty kaksi kertaa. Soveltamalla lopuksi lausetta 2.15 saadaan

$$\lim_{n\to\infty} x_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}} \;=\; \frac{2}{1} \;=\; 2.$$

Seuraava esimerkki ei hyödynnä suoraan lukujonon raja-arvon laskusääntöjä, mutta ratkaisussa hyödynnetään samoja ideoita kuin laskusääntöjen todistuksissa.

Esimerkki 2.10. Olkoon $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ja

$$y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \quad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

Osoitetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x.$$

Valitaan aluksi mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Koska (x_n) suppenee, niin (x_n) on rajoitettu (lause 2.8, s. 30). Täten myös lukujono $(x_n - x)$ on rajoitettu ja huomautuksen 2.7 (s. 29) nojalla

$$\exists\, M > 0 \;:\; |x_n - x| < M \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

Lisäksi lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla

$$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+ \colon\ |x_n - x| < \varepsilon/2 \quad \forall n > n_\varepsilon.$$

Olkoon nyt $n > n_\varepsilon$. Koska

$$\frac{Mn_\varepsilon}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \ \Leftrightarrow\ n > \frac{2Mn_\varepsilon}{\varepsilon},$$

niin tällöin

$$\begin{aligned}
|y_n - x| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - x\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{n}\cdot nx\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x\right| \\
&= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x)\right| \\
&\le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k - x| \\
&\overset{n>n_\varepsilon}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_\varepsilon}\underbrace{|x_k - x|}_{\le M} + \frac{1}{n}\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n}\underbrace{|x_k - x|}_{<\varepsilon/2} \\
&< \frac{1}{n}\cdot n_\varepsilon M + \frac{1}{n}\cdot(n - n_\varepsilon)\,\frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{Mn_\varepsilon}{n} + \underbrace{\frac{n - n_\varepsilon}{n}}_{<1}\cdot\frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{Mn_\varepsilon}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

kun

$$n > \max\left\{n_\varepsilon, \frac{2Mn_\varepsilon}{\varepsilon}\right\}.$$

Väite seuraa nyt lukujonon raja-arvon määritelmästä, sillä määritelmässä vaadituksi rajaluvuksi voidaan asettaa mikä tahansa kokonaisluku, joka on suurempi kuin

$$\max\left\{n_\varepsilon, \frac{2Mn_\varepsilon}{\varepsilon}\right\}.$$

Tutkitaan vielä tapausta, jossa kahdella lukujonolla on sama raja-arvo. Lausetta kutsutaan *suppiloperiaatteeksi*.

Lause 2.17 (Suppiloperiaate)**.** *Olkoon* $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x$*. Jos on olemassa sellainen* $n_0 \in \mathbf{Z}_+$*, että*

$$x_n \leq z_n \leq y_n \qquad \forall n > n_0,$$

niin

$$\lim_{n\to\infty} z_n = x.$$

Todistus. Oletetaan, että on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbf{Z}_+$, että $x_n \leq z_n \leq y_n$ aina, kun $n > n_0$. Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Oletuksen nojalla saadaan

$$|z_n - x_n| \ \leq \ |y_n - x_n| \qquad \forall n > n_0. \tag{2.1}$$

Koska

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x,$$

niin lauseen 2.13 nojalla

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0.$$

Täten lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella

$$\begin{aligned} \exists\, n_1 \in \mathbf{Z}_+ :\ |x_n - x| \ &< \ \varepsilon/2 \qquad \forall n > n_1, \\ \exists\, n_2 \in \mathbf{Z}_+ :\ |x_n - y_n| \ &< \ \varepsilon/2 \qquad \forall n > n_2. \end{aligned}$$

Olkoon nyt $n > \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Tällöin

$$\begin{aligned} |z_n - x| \quad &= \quad |(z_n - x_n) + (x_n - x)| \\ &\leq \quad |z_n - x_n| + |x_n - x| \\ &\overset{(2.1)}{\leq} \quad |y_n - x_n| + |x_n - x| \\ &< \quad \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \quad \varepsilon. \end{aligned}$$

Siis lause on tosi lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella. □

Huomautus. Jos jostakin indeksin n arvosta n_0 lähtien $x_n \leq z_n \leq y_n$, mutta lukujonoilla (x_n) ja (y_n) on eri raja-arvot, niin lukujonon (z_n) raja-arvon olemassaolosta ei voida sanoa lauseen 2.17 perusteella mitään.

Esimerkki 2.11. Määritetään lukujonon (z_n) raja-arvo, kun

$$z_n = \frac{3n + \sin^2 n + \cos\sqrt{n}}{n+1}.$$

Koska sinin ja kosinin arvot ovat välillä $[-1, 1]$ ja $\sin^2 n \geq 0$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$, niin

$$\frac{3n-1}{n+1} \leq z_n \leq \frac{3n+2}{n+1} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

Lisäksi

$$\frac{3n-1}{n+1} = \frac{n(3-\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{3-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \to \frac{3-0}{1+0} = 3, \text{ kun } n \to \infty,$$

ja

$$\frac{3n+2}{n+1} = \frac{n(3+\frac{2}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{3+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \to \frac{3+0}{1+0} = 3, \text{ kun } n \to \infty,$$

joten suppiloperiaatteen (lause 2.17) nojalla

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 3.$$

Esimerkki 2.12. Määritetään lukujonon (z_n) raja-arvo, kun

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Jos $n \in \mathbf{Z}_+$, niin

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, n,$$

joten

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq z_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Kun $n \to \infty$, niin (esimerkkien 2.2 (s. 25) ja 2.3 (s. 25) sekä lauseiden 2.13, 2.15 ja 2.16 perusteella)

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \to \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1,$$

ja

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \to \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1,$$

joten suppiloperiaatteen (lause 2.17) nojalla

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 1.$$

2.3 Monotonisista jonoista

Seuraavan tyyppisiä lukujonoja $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sanotaan *monotonisiksi*:

- *kasvava* lukujono, jolle $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots$
- *vähenevä* lukujono, jolle $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots$
- *aidosti kasvava* lukujono, jolle $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$
- *aidosti vähenevä* lukujono, jolle $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots$

Huomautus. Jono voi olla samalla sekä kasvava että vähenevä, esim. $1, 1, \ldots$

Huomautus. Koska

$$x_n \leq x_{n+1} \;\Leftrightarrow\; x_{n+1} - x_n \geq 0,$$

niin lukujonon kasvavuus voidaan usein osoittaa tutkimalla kahden peräkkäisen termin erotusta. Myös osamäärää voidaan tutkia, mutta tällöin on huomioitava termien merkki. Jos esimerkiksi termit ovat positiivisia, niin

$$x_n \leq x_{n+1} \;\Leftrightarrow\; \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1.$$

Muille tapauksille (vähenevä, aidosti kasvava, aidosti vähenevä) ehtoja voidaan muokata vastaavasti.

Lause 2.18 (Monotonisten jonojen peruslause)**.** *Jos lukujono (x_n) on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, niin jono (x_n) suppenee.*

Todistus. Olkoon (x_n) jokin kasvava ylhäältä rajoitettu lukujono. Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Merkitään $K = \sup\{x_n \,|\, n \in \mathbf{Z}_+\}$. Tällöin lauseen 1.17 (s. 19) nojalla

$$x_n \leq K \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+$$

ja

$$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+ : \; x_{n_\varepsilon} > K - \varepsilon.$$

Koska lukujono (x_n) on kasvava, niin

$$x_n > K - \varepsilon \qquad \forall n > n_\varepsilon.$$

Siis

$$x_n \in \mathrm{U}_\varepsilon(K) \qquad \forall n > n_\varepsilon,$$

joten huomautuksen 2.3 (s. 25) perusteella

$$\lim_{n \to \infty} x_n = K.$$

□

Lause 2.19. *Jos lukujono* (x_n) *on vähenevä ja alhaalta rajoitettu, niin jono* (x_n) *suppenee.*

Todistus. Harjoitustehtävä.

Huomautus 2.20. Lauseen 2.18 todistuksen perusteella

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup \{x_n \,|\, n \in \mathbf{Z}_+\},$$

jos lauseen oletukset ovat voimassa.

Huomautus 2.21. Lauseessa 2.18 itse asiassa riittää, että lukujono on kasvava jostakin indeksin n arvosta n_0 alkaen. Tällöin kuitenkin voi olla

$$\lim_{n\to\infty} x_n \neq \sup \{x_n \,|\, n \in \mathbf{Z}_+\}.$$

Huomautus 2.22. Huomautuksia 2.20 ja 2.21 vastaavat tulokset ovat voimassa väheneville alhaalta rajoitetuille lukujonoille.

Esimerkki 2.13. Olkoon

$$x_n = 1 - \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

Osoitetaan, että lukujono (x_n) suppenee.

1° Lukujono (x_n) on kasvava, sillä

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \;=\; \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$.

2° Lukujono (x_n) on ylhäältä rajoitettu, sillä $1 - \dfrac{1}{n} < 1$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$.

Kohdista 1° ja 2° seuraa monotonisten jonojen peruslauseen (lause 2.18) nojalla, että lukujono (x_n) suppenee. Lisäksi huomautuksen 2.20 ja esimerkin 1.23 (s. 18) perusteella

$$\lim_{n\to\infty} x_n \;=\; \sup\left\{1 - \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{Z}_+\right\} \;=\; 1.$$

Esimerkki 2.14. Olkoon $x_n = q^n$ ($n \in \mathbf{Z}_+$), missä $0 < q < 1$ ($q \in \mathbf{R}$). Osoitetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

hyödyntämällä lausetta 2.19 (vrt. esimerkki 2.6, s. 27).

1° Jono (x_n) on vähenevä, sillä $x_n > 0$ ja

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{q^{n+1}}{q^n} = q < 1 \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

2° Jono (x_n) on alhaalta rajoitettu, sillä $x_n = q^n > 0$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$.

Kohdista 1° ja 2° seuraa lauseen 2.19 nojalla, että on olemassa $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Edelleen koska

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} q \cdot x_n = q \cdot \lim_{n\to\infty} x_n,$$

saadaan

$$x = q \cdot x \quad (0 < q < 1).$$

Siis $x = 0$, joten

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0,$$

kun $0 < q < 1$.

Esimerkki 2.15. Olkoon

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

Osoitetaan, että lukujono (x_n) suppenee (vrt. esimerkki 2.21, s. 54).

1° Jono (x_n) on kasvava, sillä

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

2° Osoitetaan induktiolla, että

$$x_n \le 2 - \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

Tällöin jono (x_n) on ylhäältä rajoitettu.

1. *Perusaskel.* Kun $n = 1$, niin $x_n = 1$ ja epäyhtälön oikea puoli on $2 - \frac{1}{1} = 1$, joten epäyhtälö on voimassa.

2. *Induktio-oletus*: $x_k \;\le\; 2 - \dfrac{1}{k} \quad (k \in \mathbf{Z}_+)$.

3. *Induktioväite*: $x_{k+1} \;\le\; 2 - \dfrac{1}{k+1}$.

4. *Induktioaskel.* Induktio-oletusta käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned} x_{k+1} \quad &= \quad x_k + \frac{1}{(k+1)^2} \\ &\overset{\text{ind.ol.}}{\le} \quad 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \\ &\overset{k+1>k}{<} \quad 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \quad 2 - \frac{(k+1)-1}{k(k+1)} \\ &= \quad 2 - \frac{1}{k+1}, \end{aligned}$$

joten induktioväite on tosi.

Kohdista 1–4 seuraa induktioperiaatteen nojalla, että

$$x_n \;\le\; 2 - \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

Siis kohtien 1° ja 2° sekä monotonisten jonojen peruslauseen (lause 2.18) nojalla jono (x_n) suppenee.

Esimerkki 2.16. Olkoon $a > 0$ $(a \in \mathbf{R})$. Tarkastellaan sellaista lukujonoa (x_n), että

$$x_1 > \sqrt{a} \qquad \text{ja} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big) \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

Määritetään jonon (x_n) raja-arvo.

1° Koska $a > 0$, niin selvästi $x_n > 0$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$ (täsmällinen todistus induktiolla). Täten lukujono (x_n) on alhaalta rajoitettu. Lisäksi

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big) - \sqrt{a} = \frac{x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} \ge 0$$

kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$, joten $x_n \ge \sqrt{a}$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$.

2° Jono (x_n) on vähenevä, sillä kohdan 1° nojalla

$$x_{n+1} \;=\; \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big) \overset{\sqrt{a}\le x_n}{\le} \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{x_n^2}{x_n}\Big) \;=\; x_n$$

kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$.

Kohdista 1° ja 2° seuraa lauseen 2.19 nojalla, että on olemassa

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Lisäksi kohdan 1° ja lauseen 2.9 (s. 30) perusteella

$$x \ge \sqrt{a} > 0.$$

Koska

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1},$$

saadaan raja-arvojen laskusääntöjä käyttämällä tällöin

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{a}{x}\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad 2x = \frac{x^2+a}{x} \\ &\Leftrightarrow \quad 2x^2 = x^2 + a \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = a \\ &\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{a}. \end{aligned}$$

Lause 2.23. *Olkoot*

$$x_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \quad \textit{ja} \quad y_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!},$$

missä $n \in \mathbf{Z}_+$. Tällöin lukujonot (x_n) ja (y_n) suppenevat kohti samaa raja-arvoa.

Todistus. Jaetaan todistus kolmeen osaan.

(i) Osoitetaan ensin, että lukujono (y_n) suppenee.

1° Jono (y_n) on kasvava, sillä

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

2° Induktiolla voidaan helposti osoittaa, että $2^{i-1} \leq i!$ kaikilla $i \in \mathbf{Z}_+$ (harjoitustehtävä). Täten

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \;=\; 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \\ &\leq 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} \;=\; 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i} \\ &= 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &< 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} \\ &= 3 \end{aligned}$$

kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$. Siis lukujono (y_n) on ylhäältä rajoitettu.

Kohdista 1° ja 2° seuraa monotonisten jonojen peruslauseen (lause 2.18) nojalla, että lukujono (y_n) suppenee eli on olemassa $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

(ii) Osoitetaan toiseksi, että lukujono (x_n) suppenee.

1° Induktiolla voidaan osoittaa, että kun $n \geq 2$ ($n \in \mathbf{Z}$), niin

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}$$

(harjoitustehtävä). Jos siis $n \geq 2$, niin

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{x_{n-1}} &= \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} \;=\; \frac{(n+1)^n}{n^n} \Big/ \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} \\ &= \frac{(n+1)^n \cdot (n-1)^{n-1}}{n^n \cdot n^{n-1}} \\ &= \frac{n}{n-1} \cdot \frac{(n+1)^n \cdot (n-1)^n}{n^n \cdot n^n} \\ &= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \\ &= \frac{n}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \\ &> \frac{n}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Täten jono (x_n) on (aidosti) kasvava.

2° Jono (x_n) on ylhäältä rajoitettu, sillä binomikaavan (esimerkki 1.13, s. 7) nojalla

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} \left(\frac{1}{n}\right)^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!\,(n-i)!} \cdot \frac{1}{n^i} \\
&= 1+1+\sum_{i=2}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots((n-i)+1)}{i!\,n^i} \\
&= 1+1+\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{n-(i-1)}{n} \\
&= 1+1+\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i!} \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)}_{<1} \\
&\leq 1+1+\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i!} \\
&= y_n \\
&< 3
\end{aligned}$$

kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$.

Kohdista 1° ja 2° seuraa monotonisten jonojen peruslauseen (lause 2.18) nojalla, että lukujono (x_n) suppenee eli on olemassa $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

(iii) Osoitetaan lopuksi, että $x = y$.

Kohdan (ii) perusteella $x_n \leq y_n$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$, joten kohtien (i) ja (ii) raja-arvotulosten sekä seurauksen 2.14 (s. 34) nojalla

$$x \leq y.$$

Osoitetaan sitten, että myös $y \leq x$. Valitaan aluksi mielivaltainen $k > 1$ ($k \in \mathbf{Z}_+$), ja osoitetaan seurausta 2.14 (s. 34) käyttämällä, että $y_k \leq x$.

Merkitään

$$z_n = 1+1+\sum_{i=2}^{k} \frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right), \quad \text{kun } n \in \mathbf{Z}_+.$$

Tällöin z_n on termistä x_n kohdassa (ii) binomikaavan avulla saadun summalausekkeen osasumma (jos $n \geq k$). Lukujonoille (z_n) ja (x_n) saadaan nyt seuraavat tulokset.

1° Oletetaan, että $n \geq k$ (≥ 2). Kohdan (ii) todistuksen nojalla

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \\
&\vdots \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} 1+1+\sum_{i=2}^{n} \underbrace{\frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)}_{>0} \\
&\geq 1+1+\sum_{i=2}^{k} \frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right) \\
&= z_n.
\end{aligned}$$

Siis

$$z_n \leq x_n \qquad \forall n \geq k.$$

2° Selvästi

$$\lim_{n\to\infty} z_n = y_k,$$

sillä kaikilla $i = 2, 3, \ldots, k$ pätee

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right) \to 1, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

3° Kohdan (ii) nojalla $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Täten kohtien 1°–3° ja seurauksen 2.14 (s. 34) nojalla

$$y_k \leq x. \tag{2.2}$$

Koska luku $k > 1$ oli mielivaltainen, epäyhtälö (2.2) pätee kaikilla $k > 1$. Lisäksi kohdan (i) nojalla

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y,$$

joten lauseen 2.9 (s. 30) perusteella

$$y \leq x.$$

Siis $x \leq y$ ja $y \leq x$, joten $x = y$. □

Huomautus 2.24. Lauseessa 2.23 esiintyvää raja-arvoa sanotaan *Neperin luvuksi* ja merkitään kirjaimella e.

Esimerkki 2.17. Osoitetaan, että

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

Vasen epäyhtälö seuraa lauseen 2.23 todistuksen kohdasta (ii). Oikeanpuoleisen epäyhtälön todistamiseksi merkitään

$$w_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 \cdot e = e.$$

Lisäksi lukujono (w_n) on vähenevä, sillä jos $n > 1$, niin Bernoullin epäyhtälön (ks. esimerkki 1.5, s. 3) nojalla

$$\begin{aligned}
\frac{w_{n-1}}{w_n} &= \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{n^n}{(n-1)^n} \bigg/ \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} \\
&= \frac{n^n \cdot n^{n+1}}{(n-1)^n \cdot (n+1)^{n+1}} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n^n \cdot n^n}{(n-1)^n \cdot (n+1)^n} \\
&= \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n \\
&= \frac{n}{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \\
&> \frac{n}{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \\
&\geq \frac{n}{n+1} \cdot \left(1+n \cdot \frac{1}{n^2}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Siis luvun e likiarvon laskemiseksi saadaan epäyhtälöt ($n \in \mathbf{Z}_+$)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Esimerkki 2.18. Osoitetaan, että

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}.$$

Aluksi havaitaan, että

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;=\; e.$$

Täten

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{1}{n}\right)^n &\overset{n\geq 1}{=} \frac{1}{(\frac{n}{n-1})^n} \\
&= \frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}\cdot(1+\underbrace{\tfrac{1}{n-1}}_{\to 0})} \\
&\to \frac{1}{e\cdot 1} \;=\; \frac{1}{e} \;=\; e^{-1},
\end{aligned}$$

kun $n\to\infty$.

Esimerkki 2.19. Koska suppenevan lukujonon jokainen osajono suppenee kohti alkuperäisen lukujonon raja-arvoa (lause 2.5, s. 28), niin

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \;=\; \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} \;=\; e^{\frac{1}{2}} \;=\; \sqrt{e}$$

ja

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{6n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1+1}{3n-1}\right)^{6n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{6n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{2(3n-1)+2} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left[\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1}\right]^2\cdot\left(1+\underbrace{\frac{1}{3n-1}}_{\to 0}\right)^2\right] \\
&= e^2\cdot 1 \\
&= e^2.
\end{aligned}$$

Lause 2.25 (Sisäkkäisten välien lause). *Olkoon* (I_n), $I_n = [a_n, b_n]$, *jono suljettuja välejä, joille*

(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$

Tällöin $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ *sisältää täsmälleen yhden pisteen.*

Todistus. Nyt

$$a_1 \le a_n < b_n \le b_1 \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+,$$

joten lukujono (a_n) on ylhäältä rajoitettu ja jono (b_n) alhaalta rajoitettu. Lisäksi

$$a_n \le a_{n+1} \quad \text{ja} \quad b_{n+1} \le b_n \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+,$$

joten (a_n) on kasvava ja (b_n) vähenevä. Siis lauseiden 2.18 ja 2.19 perusteella on olemassa

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Näin ollen lauseen 2.13 (s. 32) ja oletuksen (ii) nojalla

$$b - a \;=\; \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n \;=\; \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) \;=\; 0,$$

joten $a = b$. Siis

$$a_n \le a = b \le b_n \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+,$$

joten

$$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n].$$

Täten ainakin piste a kuuluu leikkaukseen.

Oletetaan nyt, että $x \ne a$. Tällöin $|x - a| > 0$. Koska

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a,$$

niin huomautuksen 2.3 (s. 25) nojalla on olemassa sellainen $k \in \mathbf{Z}_+$, että

$$a_n, b_n \in \mathrm{U}_{|x-a|}(a) \qquad \forall n > k.$$

Koska $x \notin \mathrm{U}_{|x-a|}(a)$, niin $x \notin [a_n, b_n]$, kun $n > k$. Siis

$$x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n],$$

joten

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{a\}\,.$$

□

Lause 2.26 (Bolzano-Weierstrassin lause)**.** *Rajoitetulla lukujonolla on suppeneva osajono.*

Todistus. Olkoon (x_n) jokin rajoitettu jono. Tällöin on olemassa väli $I_1 = [a_1, b_1]$, joka sisältää kaikki jonon (x_n) pisteet. Olkoon

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

välin I_1 keskipiste. Tällöin ainakin toinen väleistä $[a_1, c_1]$ ja $[c_1, b_1]$ sisältää äärettömän monta jonon (x_n) alkiota. Merkitään sitä $I_2 = [a_2, b_2]$. Jos molemmat välit sisältävät äärettömän monta jonon (x_n) alkiota, valitaan $I_2 = [a_1, c_1]$.

Jatketaan menettelyä siten, että jos

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

on välin I_k keskipiste, niin valitaan väleistä $[a_k, c_k]$ ja $[c_k, b_k]$ se, kumpi sisältää äärettömän monta lukujonon (x_n) alkiota, ja merkitään sitä $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$. Jos molemmat välit sisältävät äärettömän monta lukujonon (x_n) alkiota, valitaan $I_{k+1} = [a_k, c_k]$.

Näin saadaan jono $(k = 1, 2, \ldots)$ suljettuja välejä $I_k = [a_k, b_k]$, joille $I_{k+1} \subseteq I_k$. Edelleen välin pituus

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \cdots = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \to 0, \quad \text{kun } k \to \infty.$$

Siis sisäkkäisten välien lauseen nojalla on olemassa sellainen $a \in \mathbf{R}$, että

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] = \{a\}.$$

Olkoon nyt x_{n_1} jokin jonon (x_n) alkio, jolloin $x_{n_1} \in I_1$. Valitaan (järjestyksessä) jonon (x_n) alkiot $x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots$ siten, että

$$x_{n_k} \in I_k \quad \text{ja} \quad n_k > n_{k-1}.$$

Kukin alkio x_{n_k} voidaan valita, sillä väli I_k sisältää äärettömän monta jonon (x_n) alkiota ja kussakin valintatilanteessa on siihen mennessä valittu vain äärellinen määrä alkioita. Jono (x_{n_k}) on nyt jonon (x_n) osajono. Lisäksi $a, x_{n_k} \in I_k$ kaikilla $k \in \mathbf{Z}_+$, joten

$$|x_{n_k} - a| \leq b_k - a_k \to 0, \quad \text{kun } k \to \infty.$$

Siis osajono (x_{n_k}) suppenee (kohti raja-arvoa a).

□

2.4 Cauchyn jonoista

Määritelmä 2.3. Lukujono (x_n) on *Cauchyn jono*, jos

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists\, n_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+ \colon\ |x_n - x_{n+p}| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon\ \forall p \in \mathbf{Z}_+ \tag{2.3}$$

tai

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists\, n_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+ \colon\ |x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall m, n > n_\varepsilon. \tag{2.4}$$

Huomautus. Ehtoa (2.3) (tai (2.4)) sanotaan *Cauchyn suppenemisehdoksi.*

Huomautus. Lukujonon raja-arvon määritelmän tapaan (ks. huomautus 2.1, s. 24) Cauchyn suppenemisehdossa ei oleellista, että relaatioiksi on valittu ”pienempi kuin” ja ”suurempi kuin”. Aivan yhtä hyvin määritelmässä olisi voinut olla esimerkiksi $|x_n - x_m| \leq \varepsilon$ tai $m, n \geq n_\varepsilon$.

Lause 2.27. *Jokainen Cauchyn jono on rajoitettu.*

Todistus. Oletetaan, että (x_n) on Cauchyn jono. Tällöin on olemassa sellainen $n_1 \in \mathbf{Z}_+$, että

$$|x_n - x_m| < 1 \qquad \forall m, n \geq n_1.$$

Siis

$$|x_n| \ = \ |x_{n_1} + x_n - x_{n_1}| \ \leq \ |x_{n_1}| + |x_n - x_{n_1}| \ < \ |x_{n_1}| + 1 \qquad \forall n \geq n_1.$$

Valitaan nyt

$$M = \max\left\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_1-1}|, |x_{n_1}| + 1\right\}.$$

Tällöin

$$|x_n| \leq M \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

□

Lause 2.28. *Lukujono (x_n) suppenee $\Leftrightarrow$ (x_n) on Cauchyn jono.*

Todistus. ’$\Rightarrow$’: Oletetaan ensin, että (x_n) suppenee ja

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Tällöin lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+$, että

$$|x_n - x| < \varepsilon/2 \qquad \forall n > n_\varepsilon.$$

Jos nyt $m, n > n_\varepsilon$, niin

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) + (x - x_m)| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Siis (x_n) on Cauchyn jono.

'$\Leftarrow$': Oletetaan sitten, että (x_n) on Cauchyn jono. Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+$, että

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2 \qquad \forall m, n > n_\varepsilon.$$

Lisäksi (x_n) on Cauchyn jonona rajoitettu (lause 2.27), joten Bolzano-Weierstrassin lauseen (lause 2.26) nojalla lukujonolla (x_n) on suppeneva osajono (x_{n_k}). Tällöin lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa $x \in \mathbf{R}$ ja $k_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+$ siten, että

$$|x_{n_k} - x| < \varepsilon/2 \qquad \forall k > k_\varepsilon.$$

Valitaan $K \in \mathbf{Z}_+$ siten, että $K > k_\varepsilon$ ja $n_K > n_\varepsilon$. Jos tällöin $n > n_\varepsilon$, niin

$$|x_n - x| = |(x_{n_K} - x) + (x_n - x_{n_K})| \leq |x_{n_K} - x| + |x_n - x_{n_K}| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Siis (x_n) suppenee lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella.

$\square$

Huomautus. Cauchyn suppenemisehdolla ei määritetä raja-arvoa, vaan todistetaan sen olemassaolo.

Esimerkki 2.20. Olkoon

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

Tällöin

$$|x_n - x_{n+n}| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \geq n \cdot \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

Siis Cauchyn suppenemisehto ei ole voimassa, joten lukujono (x_n) ei suppene.

Esimerkki 2.21. Osoitetaan, että lukujono (x_n) suppenee (vrt. esimerkki 2.15, s. 43), kun

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Merkitään $n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, ja oletetaan, että $n > n_\varepsilon$. Tällöin

$$n > \frac{1}{\varepsilon},$$

joten

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Koska

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k \cdot k} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \qquad (k > 1),$$

niin tällöin kaikilla $p \in \mathbf{Z}_+$

$$\begin{aligned}
|x_n - x_{n+p}| &= \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\
&< \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(n+p)-1} - \frac{1}{n+p}\right) \\
&= \frac{1}{n} - \underbrace{\frac{1}{n+p}}_{>0} \\
&< \frac{1}{n} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Siis (x_n) on Cauchyn jono, joten (x_n) suppenee.

2.5 Raja-arvokäsitteen laajentaminen

Joskus on käytännöllistä laajentaa merkinnällisesti lukujonon raja-arvo tapauksiin, joissa lukujonon alkiot kasvavat tai vähenevät rajatta.

Määritelmä 2.4. Jos jokaista lukua $M > 0$ kohti on olemassa sellainen $n_M \in \mathbf{Z}_+$, että $x_n > M$ aina, kun $n > n_M$, voidaan merkitä

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Jos vastaavasti kaikilla $M > 0$ on olemassa sellainen $n_m \in \mathbf{Z}_+$, että $x_n < -M$ aina, kun $n > n_m$, voidaan merkitä

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Huomautus. Määritelmä 2.4 voidaan esittää myös muodossa

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall M > 0\colon \exists\, n_M \in \mathbf{Z}_+ : x_n > M \qquad \text{aina, kun } n > n_M,\\
\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall M > 0\colon \exists\, n_m \in \mathbf{Z}_+ :\ x_n < -M \quad \text{aina, kun } n > n_m.
\end{aligned}$$

Huomautus. Vaikka voidaan sanoa, että lukujonon raja-arvo on eräällä tavalla äärettömänä olemassa, ei lukujono silti suppene (vaan hajaantuu).

Esimerkki 2.22. Selvästi

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty \qquad \text{ja} \qquad \lim_{n\to\infty} -n = -\infty,$$

sillä määritelmässä 2.4 tarvittaviksi rajaluvuiksi voidaan valita esimerkiksi $\lceil M \rceil$.

Esimerkki 2.23. Osoitetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+1} = \infty.$$

Valitaan mielivaltainen $M > 0$. Merkitään $n_M = \lceil 2M \rceil$, ja oletetaan, että $n > n_M$. Tällöin $n > 2M$, joten

$$\frac{n^2+1}{n+1} > \frac{n^2}{n+1} > \frac{n^2}{n+n} = \frac{n}{2} > \frac{2M}{2} = M.$$

Väite seuraa nyt määritelmästä 2.4.

Esimerkissä 2.23 rajaluku $n_M = \lceil 2M \rceil$ on keksitty havaitsemalla, että

$$\frac{n}{2} > M \;\Leftrightarrow\; n > 2M.$$

On hyväksyttävää esittää ratkaisu (luvun $M > 0$ valinnan jälkeen) myös muodossa

$$\frac{n^2+1}{n+1} \;>\; \frac{n^2}{n+1} \;>\; \frac{n^2}{n+n} \;=\; \frac{n}{2} \;>\; M,$$

kun $n > 2M$.

Esimerkki 2.24. Olkoon $x \in \mathbf{R}$. Osoitetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} \infty, & \text{kun } x > 1, \qquad \text{(a)} \\ 1, & \text{kun } x = 1, \qquad \text{(b)} \\ 0, & \text{kun } |x| < 1, \qquad \text{(c)} \\ \nexists, & \text{kun } x \leq -1. \qquad \text{(d)} \end{cases}$$

Tarkastellaan ensin kohtaa (a). Valitaan mielivaltainen $M > 0$. Koska $x > 1$, niin on olemassa sellainen $a > 0$, että $x = 1 + a$. Tällöin Bernoullin epäyhtälön (esimerkki 1.5, s. 3) nojalla

$$x^n \;=\; (1+a)^n \;\geq\; 1 + na \;>\; M,$$

kun $n > \frac{M-1}{a}$. Siis väite on tosi määritelmän 2.4 perusteella.

Kohdassa (b) kyseessä on vakiojono, joten tulos on selvä (ks. esimerkki 2.2, s. 25).

Tarkastellaan sitten kohtaa (c). Jos $x = 0$, kyseessä on vakiojono, joten tulos on selvä (vrt. (b)-kohta). Jos taas $x \neq 0$, niin tulos seuraa huomautuksesta 2.2 (s. 24) ja esimerkistä 2.6 (s. 27) tai esimerkistä 2.14 (s. 43).

Todistetaan lopuksi kohta (d). Jos $n \in \mathbf{Z}_+$, niin

$$\left|x^n - x^{n+1}\right| \;=\; |x^n(1-x)| \;=\; \overbrace{|x|^n}^{\geq 1}\,\overbrace{|1-x|}^{\geq 2} \;\geq\; 1 \cdot 2 \;=\; 2.$$

Siis Cauchyn suppenemisehto ei ole voimassa, joten

$$\nexists \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Lisäksi lukujonon termit ovat vuorotellen positiivisia ja negatiivisia, joten

$$\lim_{n\to\infty} x_n \neq \pm\infty.$$

Huomautus. Lukujonon raja-arvon laskusäännöt ja muut lukujonon raja-arvoa koskevat tulokset ovat ”soveltuvin osin” voimassa myös, kun lukujonon alkiot kasvavat tai vähenevät rajatta (harjoitustehtävä).

3 Funktion raja-arvo

3.1 Reaalimuuttujan funktioista

Palautetaan aluksi mieleen muutamia reaalimuuttujan funktioita koskevia peruskäsitteitä. Olkoon $A, B \subseteq \mathbf{R}$ ($A, B \neq \emptyset$). Tällöin *funktio* eli *kuvaus*

$$f\colon A \to B$$

on sääntö, joka liittää jokaiseen joukon A alkioon yksikäsitteisen alkion $y \in B$.[1] Joukko A on kuvauksen *määrittelyjoukko* ja joukko B *maalijoukko*. Alkiota y kutsutaan alkion x *kuvaksi* ja merkitään $f(x)$.

Joskus funktion määrittelyjoukko ja maalijoukko jätetään merkitsemättä ja puhutaan yksinkertaisesti esimerkiksi funktiosta

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}. \tag{3.1}$$

Tällöin määrittelyjoukoksi ajatellaan laajin mahdollinen joukko ($\subseteq \mathbf{R}$). Maalijoukon voidaan tällä kurssilla ajatella aina olevan $\mathbf{R}$, jos ei erikseen toisin mainita. Esimerkiksi funktio (3.1) tulkitaan funktioksi

$$f\colon\ [-1, 1] \to \mathbf{R},\ f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Olkoon $A_1 \subseteq A$ ja $B_1 \subseteq B$. Tällöin joukko

$$f(A_1) = \{y \in B \mid \exists\, x \in A_1\colon f(x) = y\}$$

on joukon A_1 *kuvajoukko* kuvauksessa $f\colon A \to B$ ja joukko

$$f^{-1}(B_1) = \{x \in A \mid f(x) \in B_1\}$$

on joukon B_1 *alkukuva*.

Olkoon $f\colon A \to B$ ja $A_1 \subseteq A$. Tällöin kuvaus $g\colon A_1 \to B$, missä $g(x) = f(x)$ kaikilla $x \in A_1$, on funktion f *rajoittuma* joukkoon A_1 (merkitään $g = f|A_1$).

Kuvaus $f\colon A \to B$ on *injektio*, jos

$$x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2)$$

eli

$$f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1 = x_2$$

[1] Täsmällisesti ottaen f on *tulojoukon* eli *karteesisen tulon* $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ ja } y \in B\}$ osajoukko.

kaikilla $x_1, x_2 \in A$, ja *surjektio*, jos $f(A) = B$ eli

$$\forall y \in B \colon \exists\, x \in A \colon f(x) = y.$$

Kuvaus on *bijektio*, jos se on sekä surjektio että injektio.

Jos $f \colon A \to B$ on bijektio, funktiolla f on olemassa *käänteisfunktio* $f^{-1} \colon B \to A$ siten, että

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Huomautus 3.1. Jos funktiolla $f \colon A \to B$ on käänteisfunktio $f^{-1} \colon B \to A$, niin

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A \qquad \text{ja} \qquad f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in B.$$

Esimerkki 3.1. Olkoon $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x$.

1° f on injektio, sillä jos $x_1 \neq x_2$, niin $2x_1 \neq 2x_2$ kaikilla $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$.

2° f on surjektio, sillä jos $y \in \mathbf{R}$, niin $f(\frac{y}{2}) = y$ (ja $\frac{y}{2} \in \mathbf{R}$).

Kohtien 1° ja 2° perusteella f on bijektio, joten sillä on olemassa käänteisfunktio $f^{-1} \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{2}.$$

Esimerkki 3.2. Olkoon $f \colon \mathbf{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$.

1° f on injektio, sillä jos $x_1 \neq x_2$ ja $x_1, x_2 \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$, niin $x_1^2 \neq x_2^2$.

2° f ei ole surjektio, sillä $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$, joten mikään luku ei kuvaudu negatiivisille luvuille.

Funktio $f \colon \mathbf{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$ sen sijaan on bijektio.

Funktioiden $f \colon A \to B$ ja $g \colon B \to C$ *yhdistetty funktio* on funktio $g \circ f \colon A \to C$, jonka sääntö on

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

kaikilla $x \in A$. Tällöin funktiota f sanotaan yhdistetyn funktion $g \circ f$ *sisäfunktioksi* ja funktiota g vastaavasti funktion $g \circ f$ *ulkofunktioksi.*

Esimerkki 3.3. Olkoot $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ja $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sellaisia funktioita, että

$$f(x) = x^3 \quad \text{ja} \quad g(x) = 1 + 2x.$$

Tällöin saadaan kuvaukset

- $g \circ f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = 1 + 2x^3$,
- $f \circ g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 + 2x) = (1 + 2x)^3$.
- $f \circ f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^3) = (x^3)^3 = x^9$.
- $g \circ g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(1 + 2x) = 1 + 2(1 + 2x) = 3 + 4x$.

Huomautus. Edellä on yksinkertaisuuden vuoksi oletettu, että kuvauksia f ja g yhdistettäessä sisäfunktion f maalijoukko ja ulkofunktion g määrittelyjoukko ovat yhtenevät. Tämä vaatimus voidaan helposti vaihtaa oletukseen $f(A) \subseteq B$, missä A on sisäfunktion määrittelyjoukko ja B on ulkofunktion määrittelyjoukko. Tällöin sisäfunktion maalijoukolle ei tarvitse asettaa muita vaatimuksia. Yleisesti kuvaukset $f\colon A \to D$ ja $g\colon B \to C$ voidaan yhdistää tarkastelemalla joukkoa

$$A' = \{x \in A \mid f(x) \in B\},$$

jolloin voidaan muodostaa yhdistetty funktio $g \circ f\colon A' \to C$.

3.2 Raja-arvon määritelmä ja perustuloksia

Olkoon f funktio, joka on määritelty avoimella välillä I lukuun ottamatta mahdollisesti yhtä pistettä $a \in I$.

Määritelmä 3.1. Funktiolla f on pisteessä a *raja-arvo* A, jos jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - A| < \varepsilon \ \text{ aina, kun } 0 < |x - a| < \delta.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Huomautus. Muita mahdollisia raja-arvon merkintätapoja ovat

$$\lim_{a} f = A \quad \text{tai} \quad f(x) \to A, \text{ kun } x \to a.$$

Ensimmäisessä tapauksessa on oltava täysin selvää, mikä muuttuja pistettä a lähenee.

Huomautus 3.2. Funktion raja-arvon määritelmä voidaan ilmoittaa myös muodossa

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \colon \exists\, \delta > 0 \colon \ |f(x) - A| < \varepsilon \ \text{ aina, kun } x \in \mathrm{U}'_\delta(a),$$

tai

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \colon \exists\, \delta > 0 \colon f(x) \in \mathrm{U}_\varepsilon(A) \ \text{ aina, kun } 0 < |x - a| < \delta,$$

tai

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \colon \exists\, \delta > 0 \colon f(x) \in \mathrm{U}_\varepsilon(A) \ \text{ aina, kun } x \in \mathrm{U}'_\delta(a).$$

Huomautus. Funktiolla $f(x)$ on pisteessä a raja-arvo A, jos funktion arvot $f(x)$ kuuluvat raja-arvon A ympäristöön $\mathrm{U}_\varepsilon(A)$ aina, kun x on riittävän lähellä pistettä a (eli $x \in \mathrm{U}'_\delta(a)$).

Huomautus 3.3. Funktion raja-arvon määritelmässäkään (vrt. huomautus 2.1, s. 24) ei ole oleellista, että ehdoissa $|f(x) - A| < \varepsilon$ ja $|x - a| < \delta$ relaatioksi on valittu "pienempi kuin". Aivan yhtä hyvin määritelmässä olisi voinut olla $|f(x) - A| \leq \varepsilon$ tai $|x - a| \leq \delta$.

Huomautus 3.4. Funktion raja-arvon määritelmän ehdossa $0 < |x - a|$ on oleellista, että relaatio on "pienempi kuin". Funktion arvolla pisteessä a ei nimittäin ole vaikutusta raja-arvoon eikä sen olemassaoloon.

Huomautus 3.5. Lukujonon raja-arvotodistusten tapaan ei ole välttämätöntä saada lopulliseksi arvioksi "$< \varepsilon$", vaan riittää saada "$< c \cdot \varepsilon$", missä $c > 0$ on jokin positiivinen vakio (joka ei riipu luvusta ε tai muuttujasta x). Toisin sanoen lausetta 2.12 (s. 32) vastaava tulos on voimassa myös funktion raja-arvolle.

Huomautus 3.6. Funktion raja-arvon määritelmästä seuraa suoraan (täsmällinen todistus jätetään harjoitustehtäväksi), että

$$\lim_{x \to a} f(x) \;=\; \lim_{h \to 0} f(a+h).$$

Esimerkki 3.4. Olkoon $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = c$. Tällöin

$$|f(x) - c| \;=\; |c - c| \;=\; 0 \;<\; \varepsilon$$

kaikilla $\varepsilon > 0$ ja kaikilla $x \in \mathbf{R}$ (ja kaikilla $\delta > 0$), joten funktion raja-arvon määritelmän nojalla

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \qquad \forall a \in \mathbf{R}.$$

Esimerkki 3.5. Olkoon $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$ ja $a \in \mathbf{R}$. Osoitetaan, että

$$\lim_{x \to a} f(x) = a.$$

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Merkitään $\delta_\varepsilon = \varepsilon$, ja oletetaan, että $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$. Tällöin[1]

$$|f(x) - a| \;=\; |x - a| \;<\; \delta_\varepsilon \;=\; \varepsilon,$$

joten tulos seuraa suoraan funktion raja-arvon määritelmästä.

Esimerkki 3.6. Olkoon $f\colon \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2 + x - 2}.$$

Osoitetaan, että

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{3}.$$

[1] Yllä voitaisiin olettaa myös pelkästään $|x - a| < \delta_\varepsilon$, sillä nyt $f(a) = a$.

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Merkitään $\delta_\varepsilon = \min\{1, 6\varepsilon\}$, ja oletetaan, että

$$0 < |x-1| < \delta_\varepsilon.$$

Tällöin $|x-1| < 6\varepsilon$. Lisäksi $|x-1| < 1$, joten $x > 0$. Jos $x \neq -2, 1$, niin

$$\frac{x-1}{x^2+x-2} = \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x+2},$$

joten

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - \frac{1}{3}\right| &= \left|\frac{1}{x+2} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3-(x+2)}{3(x+2)}\right| \\
&= \frac{|1-x|}{3\,|x+2|} \\
&\overset{x \geq 0}{=} \frac{1}{3(x+2)} \cdot |x-1| \\
&\overset{x>0}{<} \frac{1}{6} \cdot |x-1| \\
&< \frac{1}{6} \cdot 6\varepsilon \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tulos seuraa nyt funktion raja-arvon määritelmästä.

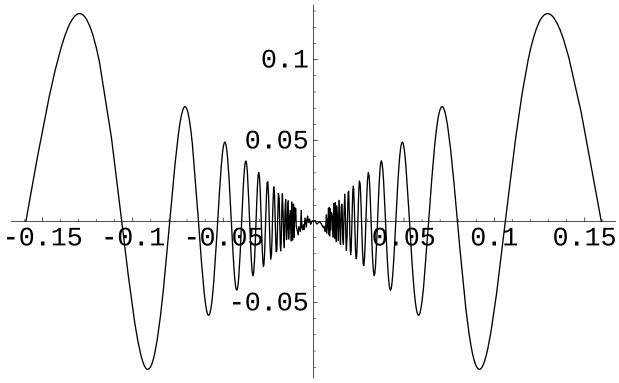
Edellä olevan kaltaisessa päättelyssä edetään monesti suoraviivaisemmin (vrt. lukujonon raja-arvoa koskeva esimerkki 2.4 sivulla 26). Usein valitaan ensin mielivaltainen $\varepsilon > 0$ ja tehdään joitakin oletuksia (esimerkiksi nyt $x > 0$ ja $x \neq 1$). Sen jälkeen päätellään esimerkiksi, että

$$\left|f(x) - \frac{1}{3}\right| \;=\; \cdots \;<\; \frac{1}{6} \cdot |x-1| \;<\; \varepsilon$$

aina, kun $0 < |x-1| < \delta_\varepsilon = \min\{1, 6\varepsilon\}$, mistä vaadittu tulos seuraa funktion raja-arvon määritelmän perusteella.

Näin voidaan menetellä, sillä tällöin on osoitettu, että vaadittu itseisarvoehto toteutuu, jos x on riittävän lähellä pistettä 1 (eli nyt $0 < |x-1| < 6\varepsilon$). Valitsemalla[1] $\delta_\varepsilon = \min\{1, 6\varepsilon\}$ tämä toteutuu aina, kun $0 < |x-1| < \delta_\varepsilon$. Alkuperäiseen ratkaisuun verrattuna luvun δ_ε valinta on nyt vain siirretty tapahtuvaksi myöhemmässä vaiheessa.

[1] Tässä ei voida valita yksinkertaisesti $\delta_\varepsilon = 6\varepsilon$, sillä oletuksen $x > 0$ takia on oltava $\delta_\varepsilon \leq 1$.



Kuva 3.1: Funktion $x \sin \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ kuvaaja välillä $\left[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\right]$.

Esimerkki 3.7. Osoitetaan, että

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Tällöin

$$\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| \;=\; |x| \overbrace{\left| \sin \frac{1}{x} \right|}^{\leq 1} \;\leq\; |x| \;<\; \varepsilon$$

aina, kun $0 < |x - 0| < \delta_\varepsilon = \varepsilon$, joten tulos seuraa funktion raja-arvon määritelmästä.

Esimerkki 3.8. Osoitetaan, että kun $a > 0$, niin

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}.$$

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Oletetaan lisäksi, että $|x - a| < a$ (jolloin $x > 0$). Tällöin

$$\left| \sqrt{x} - \sqrt{a} \right| \;=\; \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{a}|\,|\sqrt{x} + \sqrt{a}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} \;=\; \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \overset{\sqrt{x} > 0}{<} \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot |x - a| \;<\; \varepsilon,$$

kun $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon = \min\{a, \varepsilon\sqrt{a}\}$. Tulos seuraa nyt funktion raja-arvon määritelmästä.

Esimerkki 3.9. Osoitetaan, että

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to a} \cos x = \cos a$$

kaikilla $a \in \mathbf{R}$. Palautetaan aluksi trigonometriasta mieleen kaavat

$$\sin x - \sin y \;=\; 2 \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2} \tag{3.2}$$

ja

$$|\sin x| \leq |x| \tag{3.3}$$

kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$.

Olkoon sitten $a \in \mathbf{R}$. Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Merkitään $\delta = \varepsilon$, ja valitaan $x \in \mathbf{R}$ siten, että $0 < |x - a| < \delta$ $(= \varepsilon)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
|\sin x - \sin a| &\overset{(3.2)}{=} \left|2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right| \\
&= 2\underbrace{\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|}_{\leq 1} \cdot \left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \\
&\leq 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \\
&\overset{(3.3)}{\leq} 2\left|\frac{x-a}{2}\right| \\
&= |x-a| \\
&< \delta \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

joten tulos seuraa suoraan funktion raja-arvon määritelmästä.

Raja-arvo

$$\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$$

voidaan osoittaa vastaavasti käyttämällä kaavan (3.2) sijasta kaavaa

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

(harjoitustehtävä) tai käyttämällä sopivia trigonometrian kaavoja ja funktion raja-arvon laskusääntöjä (ks. esimerkki 3.16, s. 74).

Esitetään sitten muutamia funktion raja-arvon perusominaisuuksia.

Lause 3.7. *Mikäli funktion raja-arvo on olemassa, se on yksikäsitteinen.*

Todistus. Harjoitustehtävä (vrt. vastaava lukujonoja koskeva lause).

Lause 3.8. *Olkoon* $\lim_{x\to a} f(x) = A$. *Jos tällöin on olemassa sellainen* $\delta_M > 0$, *että*

$$f(x) \le M \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_{\delta_M}(a),$$

niin $A \le M$, *ja jos on olemassa sellainen* $\delta_m > 0$, *että*

$$f(x) \ge m \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_{\delta_m}(a),$$

niin $A \ge m$.

Todistus. Harjoitustehtävä (vrt. vastaava lukujonoja koskeva lause).

Lause 3.9. *Jos* $\lim_{x\to a} f(x) = A$, *niin jokaista lukua* $\varepsilon > 0$ *kohti on olemassa sellainen* $\delta > 0$, *että*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \ \text{ aina, kun } x_1, x_2 \in \mathrm{U}'_\delta(a).$$

Todistus. Harjoitustehtävä.

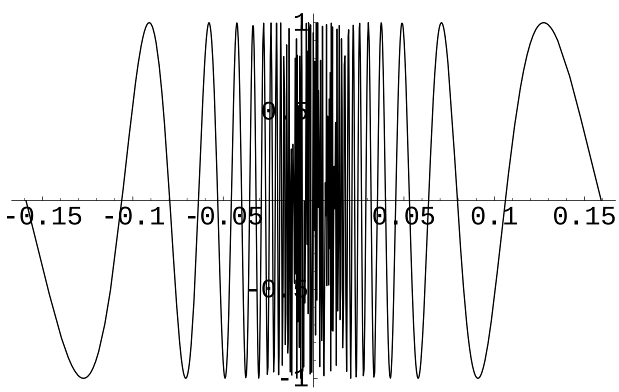
Esimerkki 3.10. Osoitetaan, että funktiolla

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \quad (x \ne 0)$$

ei ole raja-arvoa pisteessä $x = 0$. Valitaan $\varepsilon = 1$, ja osoitetaan, että jokaisessa pisteen $x = 0$ puhkaistussa ympäristössä on piste x_1, jolle $f(x_1) = 0$, ja piste x_2, jolle $f(x_2) = 1$. Tällöin lauseen 3.9 nojalla funktiolla f ei voi olla raja-arvoa pisteessä $x = 0$.

Olkoon siis $\delta > 0$. Valitaan $k = \lceil \frac{1}{2\pi\delta} \rceil + 1$, ja merkitään

$$x_1 = \frac{1}{k\cdot 2\pi} \qquad \text{ja} \qquad x_2 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi}.$$



Kuva 3.2: Funktion $\sin\frac{1}{x}$ $(x \ne 0)$ kuvaaja välillä $\left[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\right]$.

Tällöin

$$f(x_1) \;=\; \sin(k\,2\pi) \;=\; 0$$

ja

$$f(x_2) \;=\; \sin(\tfrac{\pi}{2} + k\,2\pi) \;=\; 1.$$

Lisäksi $x_1 > 0$ ja $x_2 > 0$. Koska

$$k > \frac{1}{2\pi\delta},$$

niin

$$x_1 = \frac{1}{k\,2\pi} < \delta \qquad \text{ja} \qquad x_2 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\,2\pi} < \frac{1}{k\,2\pi} < \delta.$$

Täten

$$x_1 \in \mathrm{U}'_\delta(0) \qquad \text{ja} \qquad x_2 \in \mathrm{U}'_\delta(0).$$

Siis

$$\forall \delta > 0\colon \exists x_1, x_2 \in \mathrm{U}'_\delta(0)\colon\ |f(x_1) - f(x_2)| = 1,$$

joten lauseen 3.9 nojalla funktiolla f ei voi olla raja-arvoa pisteessä $x = 0$.

Määritelmä 3.2. Funktio f on välillä I *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa sellainen $M \in \mathbf{R}$, että $f(x) \leq M$ kaikilla $x \in I$. Vastaavasti f on välillä I *alhaalta rajoitettu*, jos on olemassa sellainen $m \in \mathbf{R}$, että $f(x) \geq m$ kaikilla $x \in I$. Jos funktio f on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu välillä I, sanotaan funktion olevan *rajoitettu* välillä I.

Huomautus. Funktio f on ylhäältä (alhaalta) rajoitettu välillä I täsmälleen silloin, kun joukko

$$\{f(x) \,|\, x \in I\}$$

on ylhäältä (alhaalta) rajoitettu.

Lause 3.10. *Jos raja-arvo $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ on olemassa, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että f on rajoitettu puhkaistussa ympäristössä $\mathrm{U}'_\delta(a)$.*

Todistus. Harjoitustehtävä (vrt. vastaava lukujonoja koskeva lause).

Lause 3.11. *Olkoon $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Jos $A > 0$, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että*

$$f(x) \;>\; 0 \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_\delta(a),$$

ja jos $A < 0$, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$f(x) \;<\; 0 \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_\delta(a).$$

Todistus. Todistetaan tapaus $A > 0$ (tapaus $A < 0$ vastaavasti). Merkitään

$$K = \frac{A}{2}.$$

Koska $K > 0$, niin funktion raja-arvon määritelmän nojalla (huomautus 3.2, s. 61) on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$f(x) \in \mathrm{U}_K(A) \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_\delta(a).$$

Siis

$$f(x) > A - K = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} > 0 \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_\delta(a).$$

□

Seuraus 3.12. *Olkoon* $\lim_{x \to a} f(x) = A$. *Jos* $A \neq 0$, *niin on olemassa sellainen* $\delta > 0$, *että*

$$|f(x)| \geq \frac{|A|}{2} \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_\delta(a).$$

Todistus. Harjoitustehtävä.

Seuraavaa lausetta käyttäen voidaan monet lukujonojen raja-arvoja koskevat tulokset muuttaa vastaaviksi funktion raja-arvoja koskeviksi tuloksiksi. Lauseessa oletetaan tietysti, että lukujonon (x_n) termit kuuluvat funktion f määrittelyalueeseen. Muutenhan ei voitaisi puhua funktion arvosta pisteessä x_n.

Lause 3.13 (Lukujonon ja funktion raja-arvojen välinen yhteys)**.** *Funktiolla* f *on pisteessä* a *raja-arvo*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

jos ja vain jos

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

aina, kun (x_n) *on sellainen lukujono, että* $x_n \neq a$ *kaikilla* $n \in \mathbf{Z}_+$ *ja* $\lim_{n \to \infty} x_n = a$.

Todistus. Oletetaan ensin, että $\lim_{x \to a} f(x) = A$ ja (x_n) on sellainen lukujono, että $x_n \neq a$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$ ja $\lim_{n \to \infty} x_n = a$. Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Koska $\lim_{x \to a} f(x) = A$, niin funktion raja-arvon määritelmän (huomautus 3.2, s. 61) nojalla on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_\delta(a).$$

Toisaalta $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ja $x_n \neq a$, joten lukujonon raja-arvon määritelmän (huomautus 2.3, s. 25) nojalla on olemassa sellainen $n_\delta \in \mathbf{Z}_+$, että

$$x_n \in \mathrm{U}'_\delta(a) \qquad \forall n > n_\delta.$$

Siis

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon \qquad \forall n > n_\delta,$$

joten lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Oletetaan sitten, että

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

aina, kun (x_n) on sellainen lukujono, että $x_n \neq a$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$ ja $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Tehdään vastaoletus, että funktiolla f ei ole pisteessä a raja-arvoa tai

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq A.$$

Tällöin on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että

$$\forall \delta > 0 \colon \exists x \in \mathrm{U}'_\delta(a) \;\text{ s.e. }\; f(x) \notin \mathrm{U}_\varepsilon(A).$$

Valitaan nyt luvun δ arvoja $1/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ vastaavat luvut $x_n \in \mathrm{U}'_{1/n}(a)$, joille $f(x_n) \notin \mathrm{U}_\varepsilon(A)$. Tällöin

$$x_n \neq a \quad \text{ja} \quad x_n \in \left]a - \tfrac{1}{n}, a + \tfrac{1}{n}\right[\qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

Täten lukujonojen suppiloperiaatteen nojalla $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ja edelleen oletuksen nojalla

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Kuitenkin $f(x_n) \notin \mathrm{U}_\varepsilon(A)$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$, joten

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq A,$$

jos raja-arvo ylipäätään on olemassa. Siis seuraa ristiriita. $\square$

Huomautus. Lauseessa 3.13 edellytetään $x_n \neq a$, koska funktiota f ei välttämättä ole määritelty pisteessä a.

Esimerkkinä lauseen 3.13 käytöstä tarkastellaan funktion raja-arvon laskusääntöjä.

Lause 3.14. *Olkoon* $\lim_{x\to a} f(x) = A$ *ja* $\lim_{x\to a} g(x) = B$. *Tällöin*

(i) $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = A + B$,

(ii) $\lim_{x\to a} (f(x) - g(x)) = A - B$,

(iii) $\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = AB$,

(iv) $\lim_{x\to a} (k \cdot f(x)) = kA \quad (k \in \mathbf{R})$,

(v) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, *jos* $B \neq 0$.

Todistus. Todistetaan kohta (i). Kohdat (ii)–(v) voidaan todistaa vastaavalla tavalla (harjoitustehtävä). Olkoon siis

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = B.$$

Valitaan jokin[1] sellainen lukujono (x_n), että

$$\lim_{x\to\infty} x_n = a \qquad \text{ja} \qquad x_n \neq a \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

Tällöin lauseen 3.13 nojalla myös

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A \qquad \text{ja} \qquad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = B,$$

joten lauseen 2.13 (s. 32) nojalla

$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n) + g(x_n)) = A + B.$$

Siis lauseen 3.13 nojalla

$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = A + B.$$

□

Esimerkki 3.11. Esimerkin 3.5 (s. 62) perusteella

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0,$$

joten lauseen 3.14 nojalla

$$\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$$

kaikilla $x_0 \in \mathbf{R}$ ja kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$.

[1] Tällaisia lukujonoja on olemassa, esimerkiksi $x_n = a + 1/n$.

Esimerkki 3.12. Jos $p(x)$ on polynomi $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, niin esimerkeistä 3.4 (s. 62) ja 3.11 seuraa lauseen 3.14 perusteella, että

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$$

kaikilla $x_0 \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 3.13. Olkoon

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3} \qquad (x \neq -3, 1).$$

Esimerkin 3.12 ja lauseen 3.14 perusteella

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x+2}{x+3} \to \frac{1+2}{1+3} = \frac{3}{4}, \quad \text{kun } x \to 1.$$

Suppiloperiaate on voimassa myös funktioiden raja-arvoille.

Lause 3.15. *Olkoon* $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = A$. *Jos on olemassa sellainen* $\delta > 0$, *että*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_\delta(a),$$

niin

$$\lim_{x \to a} h(x) = A.$$

Todistus. Harjoitustehtävä (vrt. vastaava lukujonoja koskeva lause).

Esimerkki 3.14. Osoitetaan, että

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Palautetaan ensin mieleen trigonometriasta kaava

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| \qquad \forall x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[. \tag{3.4}$$

Osoitetaan sitten aputuloksena, että

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_{\frac{\pi}{2}}(0).$$

Oletetaan siis, että $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ja $x \neq 0$. Tällöin $\cos x > 0$. Lisäksi ehdon (3.4) nojalla $|x| \leq |\tan x|$, joten

$$|x| \leq \left|\frac{\sin x}{\cos x}\right|.$$

Siis
$$|\cos x| \;\leq\; \frac{|\sin x|}{|x|} \;=\; \left|\frac{\sin x}{x}\right|.$$
Toisaalta ehdon (3.4) nojalla $|\sin x| \leq |x|$, joten nyt
$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \;\leq\; 1$$
ja edelleen
$$|\cos x| \;\leq\; \left|\frac{\sin x}{x}\right| \;\leq\; 1.$$
Koska tarkasteltavassa alueessa $\cos x > 0$ ja $\sin x$ sekä x ovat molemmat yhtäaikaisesti joko positiivisia tai negatiivisia, niin
$$\cos x \;\leq\; \frac{\sin x}{x} \;\leq\; 1 \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_{\frac{\pi}{2}}(0).$$

Koska vakiofunktion raja-arvo on kyseinen vakio (esimerkki 3.4, s. 62) ja esimerkin 3.9 (s. 64) perusteella
$$\lim_{x\to 0} \cos x \;=\; \cos 0 \;=\; 1,$$
niin suppiloperiaatteen (lause 3.15) nojalla
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \;=\; 1.$$

Esimerkki 3.15. Lauseen 3.14 sekä esimerkkien 3.4 (s. 62), 3.9 (s. 64) ja 3.14 perusteella
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x\cos x} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \cos x} \;=\; 1 \cdot \frac{1}{1} \;=\; 1.$$

Tarkastellaan vielä yhdistetyn funktion raja-arvoa.

Lause 3.16. *Olkoon*
$$\lim_{y\to b} g(y) = g(b) = A \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to a} f(x) = b.$$
Tällöin
$$\lim_{x\to a} (g\circ f)(x) = \lim_{x\to a} g(f(x)) = A.$$

Todistus. Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Koska

$$\lim_{y \to b} g(y) = g(b) = A,$$

niin funktion raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa sellainen $\delta_1 > 0$, että

$$|g(y) - A| < \varepsilon \text{ aina, kun } 0 \leq |y - b| < \delta_1.$$

Koska

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

on lisäksi olemassa sellainen $\delta_2 > 0$, että

$$|f(x) - b| < \delta_1 \text{ aina, kun } 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Siis

$$|(g \circ f)(x) - A| = |g(f(x)) - A| < \varepsilon \text{ aina, kun } 0 < |x - a| < \delta_2,$$

joten funktion raja-arvon määritelmän perusteella

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to a} g(f(x)) = A.$$

$\square$

Huomautus. Yhdistetyn funktion $g \circ f$ raja-arvon olemassaoloon ei riitä pelkästään funktioiden f ja g raja-arvojen olemassaolo, sillä on mahdollista, että jokaisessa pisteen a puhkaistussa ympäristössä on piste x, jolle $f(x) = b$ (ja piste x', jolle $f(x') \neq b$). Lauseessa 3.16 asia on ratkaistu olettamalla, että funktio g on määritelty pisteessä b ja $g(b) = A$.[1]

Toinen mahdollisuus on olettaa, että $f(x) \neq b$ jossakin pisteen a puhkaistussa ympäristössä. Tällöin ei tarvitse olettaa, että g on määritelty pisteessä b.

Lause 3.17. *Olkoon*

$$\lim_{y \to b} g(y) = A \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Oletetaan lisäksi, että on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$f(x) \neq b \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_\delta(a).$$

Tällöin

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) \;=\; \lim_{x \to a} g(f(x)) \;=\; A.$$

Todistus. Harjoitustehtävä.

[1] Luvun 4 termejä käyttäen funktio g on jatkuva pisteessä b.

Ennen esimerkkejä 3.16 ja 3.17 palautetaan mieleen komplementtikulman sinin ja kosinin kaavat

$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - x) = \cos x \quad \text{ja} \quad \cos(\tfrac{\pi}{2} - x) = \sin x \tag{3.5}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 3.16. Osoitetaan yhdistetyn funktion raja-arvoa käyttämällä, että

$$\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$$

kaikilla $a \in \mathbf{R}$ (vrt. esimerkki 3.9, s. 64).

Esimerkin 3.9 (s. 64) nojalla

$$\lim_{y\to b} \sin y = \sin b$$

kaikilla $b \in \mathbf{R}$, ja esimerkin 3.12 (s. 71) perusteella

$$\lim_{x\to a} (\tfrac{\pi}{2} - x) = \tfrac{\pi}{2} - a$$

kaikilla $a \in \mathbf{R}$. Täten ehdon (3.5) ja lauseen 3.16 nojalla

$$\lim_{x\to a} \cos x \;=\; \lim_{x\to a} \sin(\tfrac{\pi}{2} - x) \;=\; \sin(\tfrac{\pi}{2} - a) \;=\; \cos a$$

kaikilla $a \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 3.17. Määritetään

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos x}$$

käyttämällä yhdistetyn funktion raja-arvoa ja sopivia trigonometrisia kaavoja. Funktion raja-arvon laskusääntöjen (lause 3.14, s. 70) ja esimerkin 3.14 (s. 71) perusteella

$$\lim_{y\to 0} -\frac{y}{\sin y} = -1,$$

ja esimerkin 3.12 (s. 71) perusteella

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\tfrac{\pi}{2} - x) = 0.$$

Lisäksi

$$\tfrac{\pi}{2} - x \neq 0 \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_{\frac{\pi}{2}}(\tfrac{\pi}{2}).$$

Täten ehdon (3.5) ja lauseen 3.17 nojalla

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos x} \;=\; \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} -\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - x))} \;=\; \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} -\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)} \;=\; -1.$$

Esimerkki 3.18. Tutkitaan yhdistetyn funktion $g \circ f$ raja-arvon olemassaoloa pisteessä $x = 1$, kun

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{kun } x < 1, \\ 2, & \text{kun } x \geq 1, \end{cases}$$

ja

$$g(y) = \begin{cases} 4, & \text{kun } y \neq 2, \\ 0, & \text{kun } y = 2. \end{cases}$$

Helposti havaitaan (harjoitustehtävä), että

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{y \to 2} g(y) = 4.$$

Jokaisessa pisteen 1 puhkaistussa ympäristössä on nyt pisteen 1 vasemmalla puolella piste x_1, jolle $f(x_1) \neq 2$, ja pisteen 1 oikealla puolella piste x_2, jolle $f(x_2) = 2$. Täten jokaisessa pisteen 1 puhkaistussa ympäristössä on piste x_1, jolle $(g \circ f)(x_1) = 4$, ja piste x_2, jolle $(g \circ f)(x_2) = 0$. Siis yhdistetyllä funktiolla $g \circ f$ ei ole raja-arvoa pisteessä $x = 1$ (lause 3.9, s. 66).

Jos funktion g sijasta tarkastellaan funktiota

$$h(y) = 4 \qquad \forall y \in \mathbf{R},$$

niin

$$\lim_{y \to 2} h(y) \;=\; h(2) \;=\; 4.$$

Tällöin lauseen 3.16 nojalla

$$\lim_{x \to 1} (h \circ f)(x) \;=\; \lim_{x \to 1} h(f(x)) \;=\; 4.$$

3.3 Toispuoleiset raja-arvot

Olkoon I jokin avoin väli ja $a \in I$. Joskus on hyödyllistä tarkastella funktion f raja-arvoa pisteessä a jossakin *joukossa* $S \subset I$. Tällöin riittää olettaa, että f on määritelty joukossa S, ja tarkasteluun otetaan mukaan vain funktion f arvot joukossa S. Raja-arvon määrittely on tietysti mahdollista vain, jos joukossa S on ääretön määrä pisteitä, jotka ovat mielivaltaisen lähellä pistettä a (eli on olemassa sellainen jono (x_n), että $x_n \in S$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$ ja $x_n \to a$, kun $n \to \infty$).

Määritelmä 3.3. Funktiolla f on pisteessä a raja-arvo A *joukossa* S, jos jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ aina, kun } x \in S \text{ ja } 0 < |x - a| < \delta.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to a,\, x \in S} f(x) = A.$$

Tärkeät erikoistapaukset raja-arvoista jossakin joukossa ovat *toispuoleiset raja-arvot*. Tällöin oletetaan, että f on määritelty jollakin avoimella välillä $]a, d[$ (oikeanpuoleinen raja-arvo, $a < d$) tai $]c, a[$ (vasemmanpuoleinen raja-arvo, $c < a$).

Määritelmä 3.4. Funktiolla f on pisteessä a *oikeanpuoleinen raja-arvo* A, jos jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ aina, kun } a < x < a + \delta.$$

Tällöin merkitään $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$.

Määritelmä 3.5. Funktiolla f on pisteessä a *vasemmanpuoleinen raja-arvo* A, jos jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ aina, kun } a - \delta < x < a.$$

Tällöin merkitään $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$.

Huomautus. Siis

$$\lim_{x \to a+} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \ |f(x) - A| < \varepsilon \text{ aina, kun } a < x < a + \delta,$$

$$\lim_{x \to a-} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \ |f(x) - A| < \varepsilon \text{ aina, kun } a - \delta < x < a.$$

Huomautus 3.18. Määritelmistä 3.4 ja 3.5 seuraa suoraan (täsmällinen todistus jätetään harjoitustehtäväksi), että

$$\lim_{x\to a+} f(x) \;=\; \lim_{h\to 0+} f(a+h) \;=\; \lim_{h\to 0-} f(a-h)$$

ja

$$\lim_{x\to a-} f(x) \;=\; \lim_{h\to 0+} f(a-h) \;=\; \lim_{h\to 0-} f(a+h).$$

Esimerkki 3.19. Osoitetaan, että

$$\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0.$$

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Merkitään $\delta = \varepsilon^2$, ja oletetaan, että

$$0 \;<\; x \;<\; 0+\delta \;=\; \delta.$$

Tällöin $\sqrt{x} < \varepsilon$, joten

$$\left|\sqrt{x} - 0\right| \;=\; \sqrt{x} \;<\; \varepsilon.$$

Tulos seuraa nyt suoraan oikeanpuoleisen raja-arvon määritelmästä.

Esimerkki 3.20. Olkoon

$$f(x) = \frac{2(1+x)(1-|x|)}{|x-1|} \qquad (x \neq 1).$$

Osoitetaan, että

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = 4.$$

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Oletetaan, että $0 < x < 1$. Tällöin

$$f(x) \;=\; \frac{2(1+x)(1-x)}{1-x} \;=\; 2+2x.$$

Siis

$$|f(x)-4| \;=\; |(2+2x)-4| \;=\; |2x-2| \;=\; 2(1-x) \;<\; \varepsilon,$$

kun $x > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Jos siis valitaan $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{2}\}$ ja oletetaan, että $1-\delta < x < 1$, niin

$$|f(x)-4| < \varepsilon.$$

Tulos seuraa nyt vasemmanpuoleisen raja-arvon määritelmästä.

Lause 3.19. *Funktiolla f on raja-arvo, jos ja vain jos sillä on samat toispuoleiset raja-arvot. Toisin sanoen*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = A.$$

Todistus. Suunta '⇒' on ilmeinen raja-arvon määritelmän perusteella. Tarkastellaan suuntaa '⇐'. Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Jos

$$\lim_{x\to a+} f(x) = A \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to a-} f(x) = A,$$

niin toispuoleisten raja-arvojen määritelmien nojalla

$$\exists\, \delta_1 > 0\colon\ |f(x) - A| < \varepsilon,\ \text{kun } a < x < a + \delta_1,$$
$$\exists\, \delta_2 > 0\colon\ |f(x) - A| < \varepsilon,\ \text{kun } a - \delta_2 < x < a.$$

Merkitään $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, ja valitaan sellainen x, että $0 < |x - a| < \delta$. Jos $x > a$, niin

$$a \ < \ x \ < \ a + \delta \ \le \ a + \delta_1,$$

ja jos $a < x$, niin

$$a - \delta_2 \ \le \ a - \delta \ < \ x \ < \ a.$$

Kummassakin tapauksessa

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

joten funktion raja-arvon määritelmän perusteella $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. □

Huomautus. Lause 3.19 pitää sisällään myös kyseisten raja-arvojen olemassaolon.

Huomautus. Toispuoleisten raja-arvojen määritelmistä seuraa suoraan, että luvussa 3.2 esitetyt tulokset ovat soveltuvin osin voimassa myös toispuoleisille raja-arvoille.

Esimerkki 3.21. Olkoon

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \qquad (x \neq 0).$$

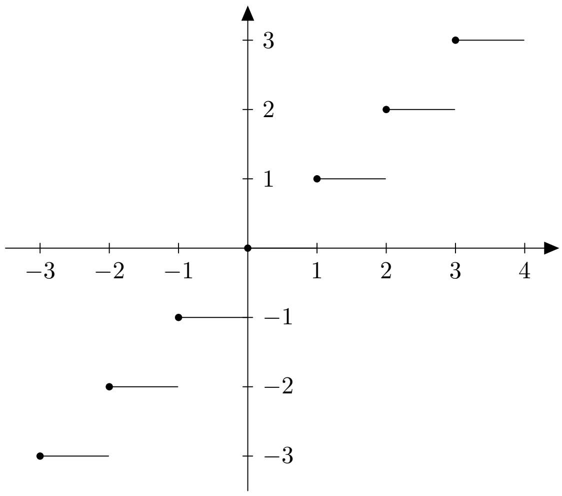
Tällöin

$$f(x) = 1 \quad \forall x > 0 \qquad \text{ja} \qquad f(x) = -1 \quad \forall x < 0,$$

joten (vrt. esimerkki 3.4, s. 62)

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 1 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to 0-} f(x) = -1.$$

Siis lauseen 3.19 nojalla funktiolla f ei ole raja-arvoa pisteessä $x = 0$.



Kuva 3.3: Lattiafunktion $f(x) = \lfloor x \rfloor$ kuvaaja välillä $[-3, 4[$.

Esimerkki 3.22. Tarkastellaan lattiafunktiota $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$,

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = \text{ suurin kokonaisluku, joka on } \leq x.$$

Jos nyt $m \in \mathbf{Z}$, niin

$$f(x) = m - 1 \quad \forall x \in \,]m-1, m[\quad \text{ja} \quad f(x) = m \quad \forall x \in \,]m, m+1[\,,$$

joten (vrt. esimerkki 3.4, s. 62)

$$\lim_{x \to m-} \lfloor x \rfloor = m - 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to m+} \lfloor x \rfloor = m.$$

Siis lauseen 3.19 nojalla funktiolla f ei ole raja-arvoa pisteessä $x = m$ ($m \in \mathbf{Z}$).

Esimerkki 3.23. Olkoon

$$f(x) \;=\; \frac{(1 - |x|)^2}{|1 - x|} \qquad (x \neq 1).$$

Määritetään toispuoleisia raja-arvoja tarkastelemalla $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

1° Olkoon x > 1. Tällöin

$$f(x) \;=\; \frac{(1 - x)^2}{x - 1} \;=\; -(1 - x) \;=\; x - 1,$$

joten (vrt. esimerkki 3.12, s. 71)

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = 0.$$

2° Olkoon 0 < x < 1. Tällöin

$$f(x) = \frac{(1-x)^2}{1-x} = 1-x,$$

joten (vrt. esimerkki 3.12, s. 71)

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = 0.$$

Kohdista 1° ja 2° seuraa lauseen 3.19 perusteella, että

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0.$$

3.4 Monotoniset funktiot

Monotonisten lukujonojen lisäksi voidaan tutkia myös monotonisia funktioita. Funktioiden monotonisuutta tarkastellaan aina jollakin tietyllä välillä.

Määritelmä 3.6. Olkoon I jokin reaalilukuväli ja f jokin tällä välillä määritelty funktio. Tällöin

- f on *kasvava* välillä I, jos $\forall x_1, x_2 \in I \colon x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,
- f on *aidosti kasvava* välillä I, jos $\forall x_1, x_2 \in I \colon x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,
- f on *vähenevä* välillä I, jos $\forall x_1, x_2 \in I \colon x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$,
- f on *aidosti vähenevä* välillä I, jos $\forall x_1, x_2 \in I \colon x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Välillä I kasvavia, aidosti kasvavia, väheneviä tai aidosti väheneviä funktioita kutsutaan välillä I *monotonisiksi funktioiksi*.

Lause 3.20. *Olkoon f välillä $]a, b[$ kasvava funktio. Jos f on välillä $]a, b[$ ylhäältä rajoitettu, niin $\lim\limits_{x \to b-} f(x)$ on äärellisenä olemassa, ja jos f on välillä $]a, b[$ alhaalta rajoitettu, niin $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ on äärellisenä olemassa.*

Todistus. Todistetaan tapaus $\lim_{x \to b-} f(x)$. Tapaus $\lim_{x \to a+} f(x)$ todistetaan vastaavasti (harjoitustehtävä). Olkoon siis funktio f välillä $]a, b[$ kasvava ja ylhäältä rajoitettu. Koska f on välillä $]a, b[$ ylhäältä rajoitettu, on olemassa

$$\sup \{ f(x) \mid x \in \,]a, b[\, \} = G \quad \text{(merk.)}.$$

Osoitetaan, että

$$\lim_{x \to b-} f(x) = G.$$

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Koska G on supremum, niin lauseen 1.17 (s. 19) nojalla on olemassa sellainen $x_\varepsilon \in \,]a, b[$, että

$$G - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq G.$$

Lisäksi f on välillä $]a, b[$ kasvava, joten

$$f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq G \text{ aina, kun } x_\varepsilon \leq x < b.$$

Merkitään $\delta = b - x_\varepsilon$ (> 0), ja oletetaan, että $b - \delta < x < b$. Tällöin

$$x_\varepsilon \;=\; b - \delta \;<\; x \;<\; b,$$

joten

$$G - \varepsilon < f(x) \leq G$$

ja edelleen

$$0 \leq G - f(x) < \varepsilon.$$

Siis

$$|G - f(x)| < \varepsilon,$$

joten vasemmanpuoleisen raja-arvon määritelmän (s. 76) nojalla $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = G$. $\square$

Lause 3.21. *Olkoon f välillä $]a, b[$ vähenevä funktio. Jos f on välillä $]a, b[$ alhaalta rajoitettu, niin $\lim\limits_{x \to b-} f(x)$ on äärellisenä olemassa, ja jos f on välillä $]a, b[$ ylhäältä rajoitettu, niin $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ on äärellisenä olemassa.*

Todistus. Harjoitustehtävä (vrt. lauseen 3.20 todistus).

Seuraus 3.22. *Välillä $]a, b[$ monotonisella ja rajoitetulla funktiolla on jokaisessa välin pisteessä oikean- ja vasemmanpuoleinen raja-arvo.*

Todistus. Olkoon $x \in\,]a, b[$. Sovelletaan lauseita 3.20 ja 3.21 väliin $]a, x[$ (vasemmanpuoleinen raja-arvo) ja väliin $]x, b[$ (oikeanpuoleinen raja-arvo). $\square$

Huomautus. Välillä $]a, b[$ monotonisella ja rajoitetulla funktiolla on jokaisessa välin $]a, b[$ pisteessä oikean- ja vasemmanpuoleinen raja-arvo sekä lisäksi oikeanpuoleinen raja-arvo pisteessä a ja vasemmanpuoleinen raja-arvo pisteessä b.

3.5 Raja-arvokäsitteen laajentaminen

Tähän asti funktion raja-arvotarkasteluissa on vaadittu, että rajapiste a on (äärellinen) reaaliluku. Joskus on tarpeen tarkastella funktion käyttäytymistä, kun funktion argumentti x kasvaa tai vähenee rajatta. Tällöin on tietysti oletettava, että funktio on määritelty jollakin välillä $]a, \infty[$ tai $]-\infty, a[$.

Määritelmä 3.7. Luku $A \in \mathbf{R}$ on funktion f on *raja-arvo äärettömyydessä*, jos jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $M > 0$, että

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ aina, kun } x > M.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Määritelmä 3.8. Luku $A \in \mathbf{R}$ on funktion f on *raja-arvo negatiivisessa äärettömyydessä*, jos jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $M > 0$, että

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ aina, kun } x < -M.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A.$$

Huomautus. Siis

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \colon \exists M > 0 \colon \; |f(x) - A| < \varepsilon \text{ aina, kun } x > M,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \colon \exists M > 0 \colon \; |f(x) - A| < \varepsilon \text{ aina, kun } x < -M.$$

Esimerkki 3.24. Osoitetaan, että

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{1+x} = 1.$$

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Oletetaan lisäksi, että $x > 1$. Tällöin

$$\left| \frac{x}{1+x} - 1 \right| = \left| \frac{x - 1 - x}{1+x} \right| = \left| \frac{-1}{1+x} \right| = \frac{1}{1+x}$$

ja

$$\frac{1}{1+x} < \varepsilon \Leftrightarrow 1 + x > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Siis

$$\left| \frac{x}{1+x} - 1 \right| < \varepsilon \text{ aina, kun } x > M = \max\left\{1, \frac{1}{\varepsilon} - 1\right\},$$

joten tulos seuraa määritelmästä 3.7.

Joskus on käytännöllistä laajentaa merkinnällisesti funktion raja-arvo tapauksiin, joissa funktion arvo kasvaa tai vähenee rajatta.

Määritelmä 3.9. Jos jokaista lukua $M > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$f(x) > M \ \text{ aina, kun } 0 < |x - a| < \delta,$$

voidaan merkitä

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

Määritelmä 3.10. Jos jokaista lukua $M > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$f(x) < -M \ \text{ aina, kun } 0 < |x - a| < \delta,$$

voidaan merkitä

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Huomautus. Siis

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0\colon \exists \delta > 0\colon f(x) > M \ \text{ aina, kun } 0 < |x-a| < \delta,$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0\colon \exists \delta > 0\colon f(x) < -M \ \text{ aina, kun } 0 < |x-a| < \delta.$$

Esimerkki 3.25. Osoitetaan, että

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-2x}{(1-x)^2} = -\infty.$$

Valitaan mielivaltainen $M > 0$. Olkoon lisäksi $0 < |x - 1| < \frac{1}{4}$, jolloin $x > \frac{3}{4}$ ja $x \neq 1$. Tällöin

$$2x > \frac{3}{2} \qquad \text{ja} \qquad 1 - 2x < -\frac{1}{2}.$$

Lisäksi

$$\frac{1}{(1-x)^2} > 0,$$

joten

$$(1-2x) \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \ < \ -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \ < \ -M,$$

kun

$$\frac{1}{2M} > (1-x)^2 \qquad \text{eli} \qquad |1-x| < \frac{1}{\sqrt{2M}}.$$

Siis

$$\frac{1-2x}{(1-x)^2} < -M \ \text{ aina, kun } 0 < |x-1| < \delta = \min\left\{\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{\sqrt{2M}}\right\},$$

joten tulos seuraa määritelmästä 3.10.

Huomautus 3.23. Raja-arvo voidaan vastaavalla tavalla laajentaa merkinnällisesti (harjoitustehtävä) myös funktion toispuolisiin raja-arvoihin

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty.$$

Huomautus 3.24. Edellä esitettyjä määritelmiä ja merkintöjä voidaan myös yhdistää. Esimerkiksi

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall M > 0\colon \exists M' > 0\colon f(x) > M \text{ aina, kun } x > M',\\
\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall M > 0\colon \exists M' > 0\colon f(x) < -M \text{ aina, kun } x > M',\\
\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall M > 0\colon \exists M' > 0\colon f(x) > M \text{ aina, kun } x < -M',\\
\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall M > 0\colon \exists M' > 0\colon f(x) < -M \text{ aina, kun } x < -M'.
\end{aligned}$$

Esimerkki 3.26. Selvästi

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty,$$

sillä tarvittavaksi rajaluvuksi M' voidaan valita luku M.

Lause 3.25. *Jos vastaavat raja-arvot ovat olemassa (äärellisenä tai äärettömänä), niin*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(\tfrac{1}{x}) \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(\tfrac{1}{x}).$$

Todistus. Todistetaan tapaus, jossa $x \to \infty$ ja raja-arvo on äärellinen. Muut tapaukset todistetaan vastaavasti (harjoitustehtävä).

Oletetaan ensin, että

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad (A \in \mathbf{R}).$$

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Tällöin määritelmän 3.7 nojalla on olemassa sellainen $M > 0$, että

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ aina, kun } x > M.$$

Merkitään $\delta = \dfrac{1}{M}$ (> 0), ja oletetaan, että $0 < x < \delta$. Tällöin

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = M,$$

joten

$$\left|f(\tfrac{1}{x}) - A\right| < \varepsilon \text{ aina, kun } 0 < x < \delta.$$

Siis oikeanpuoleisen raja-arvon määritelmän (s. 76) nojalla

$$\lim_{x\to 0+} f(\tfrac{1}{x}) = A.$$

Oletetaan sitten, että

$$\lim_{x\to 0+} f(\tfrac{1}{x}) = A \qquad (A \in \mathbf{R}).$$

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Tällöin oikeanpuoleisen raja-arvon määritelmän (s. 76) nojalla on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$\left| f(\tfrac{1}{x}) - A \right| < \varepsilon \text{ aina, kun } 0 < x < \delta.$$

Merkitään $M = \dfrac{1}{\delta}$ (> 0), ja oletetaan, että $x > M$. Tällöin

$$0 \;<\; \frac{1}{x} \;<\; \frac{1}{M} \;=\; \delta,$$

joten

$$|f(x) - A| = \left| f(\tfrac{1}{1/x}) - A \right| < \varepsilon \text{ aina, kun } x > M.$$

Siis määritelmän 3.7 nojalla

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

□

Esimerkki 3.27. Lauseen 3.25 ja esimerkin 3.26 perusteella

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} \;=\; \infty \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} \;=\; -\infty.$$

Esimerkki 3.28. Koska $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, niin lauseen 3.25 nojalla

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \;=\; \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1/x} \;=\; \lim_{x\to 0+} x \;=\; 0$$

ja

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \;=\; \lim_{x\to 0-} \frac{1}{1/x} \;=\; \lim_{x\to 0-} x \;=\; 0.$$

Esimerkki 3.29. Lauseen 3.25 ja esimerkin 3.14 (s. 71) sekä lauseen 3.19 (s. 78) perusteella

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} \;=\; \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{1/x} \;=\; \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \;=\; 1.$$

Esitetään seuraavaksi tulos, joka on joskus hyödyllinen määritettäessä lukujonojen raja-arvoja.

Lause 3.26. *Jos funktiolla f on (äärellisenä tai äärettömänä) raja-arvo*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

niin myös

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = A \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

Todistus. Todistetaan tapaus, jossa raja-arvo A on äärellinen. Muut tapaukset todistetaan vastaavasti (harjoitustehtävä). Oletetaan siis, että

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad (x, A \in \mathbf{R}).$$

Tällöin määritelmän 3.7 nojalla

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists M > 0 \colon \ |f(x) - A| < \varepsilon \ \text{ aina, kun } x \in \mathbf{R} \text{ ja } x > M.$$

Valitsemalla esimerkiksi $M' = \lceil M \rceil$ havaitaan, että

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists M' \in \mathbf{Z}_+ \colon \ |f(n) - A| < \varepsilon \ \text{ aina, kun } n \in \mathbf{Z}_+ \text{ ja } n > M',$$

joten lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = A.$$

□

Esimerkki 3.30. Lauseen 3.26 ja esimerkin 3.29 perusteella

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} \ = \ 1.$$

Huomautus. Lause 3.26 ei ole kääntäen voimassa. Jos esimerkiksi $f(x) = \cos(2\pi x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin

$$\lim_{n\to\infty} \cos(2\pi n) \ = \ \lim_{n\to\infty} 1 \ = \ 1 \quad (n \in \mathbf{Z}_+),$$

mutta raja-arvo $\lim\limits_{x\to\infty} \cos(2\pi x)$ ei ole olemassa (harjoitustehtävä).

Huomautus. Funktion raja-arvon laskusäännöt ja muut funktion raja-arvoa koskevat tulokset ovat ”soveltuvin osin” voimassa myös, kun funktion argumentti tai arvo kasvaa tai vähenee rajatta (harjoitustehtävä).

Esimerkiksi lausetta 3.20 (s. 81) vastaava tulos saa alla olevan muodon, kun funktion argumentti kasvaa tai vähenee rajatta.

Lause 3.27. *Olkoon* $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *kasvava funktio. Jos* f *on (joukossa* $\mathbf{R}$*) ylhäältä rajoitettu, niin* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *on äärellisenä olemassa, ja jos* f *on (joukossa* $\mathbf{R}$*) alhaalta rajoitettu, niin* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *on äärellisenä olemassa.*

Todistus. Harjoitustehtävä.

Raja-arvon olemassaolon kannalta merkitystä on yllä vain itseisarvoltaan hyvin suurilla argumentin arvoilla. Lauseen käyttökelpoisuuden kannalta on usein järkevää jakaa tarkastelu kahteen osaan.

Seuraus 3.28. *Jos on olemassa sellainen* $a \in \mathbf{R}$*, että funktio* $f(x)$ *on kasvava ja ylhäältä rajoitettu välillä* $[a, \infty[$*, niin* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *on äärellisenä olemassa, ja jos on olemassa sellainen* $b \in \mathbf{R}$*, että* $f(x)$ *on kasvava ja alhaalta rajoitettu välillä* $]-\infty, b]$*, niin* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *on äärellisenä olemassa.*

Todistus. Harjoitustehtävä.

4 Funktion jatkuvuus

4.1 Määritelmä ja perustuloksia

Määritelmä 4.1. Olkoon funktio f määritelty jossakin pisteen a ympäristössä (piste a mukaan luettuna). Tällöin f on *jatkuva pisteessä* a, jos jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ aina, kun } |x - a| < \delta,$$

eli jos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Huomautus 4.1. Ehto funktion f jatkuvuudelle pisteessä a voidaan ilmoittaa myös muodossa (vrt. huomautus 3.2, s. 61)

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists\, \delta > 0 \colon \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ aina, kun } x \in \mathrm{U}_\delta(a),$$

tai

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists\, \delta > 0 \colon f(x) \in \mathrm{U}_\varepsilon(f(a)) \text{ aina, kun } |x - a| < \delta,$$

tai

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists\, \delta > 0 \colon f(x) \in \mathrm{U}_\varepsilon(f(a)) \text{ aina, kun } x \in \mathrm{U}_\delta(a).$$

Määritelmä 4.2. Funktio f on *vasemmalta jatkuva* pisteessä a, jos jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ aina, kun } a - \delta < x \leq a,$$

eli jos

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a),$$

ja *oikealta jatkuva* pisteessä a, jos jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ aina, kun } a \leq x < a + \delta,$$

eli jos

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a).$$

Huomautus 4.2. Lauseen 3.19 (s. 78) sekä määritelmien 4.1 ja 4.2 nojalla f on jatkuva pisteessä a silloin ja vain silloin, kun f on sekä vasemmalta että oikealta jatkuva pisteessä a.

Huomautus 4.3. Määritelmistä 4.1 ja 4.2 sekä huomautuksista 3.6 (s. 62) ja 3.18 (s. 77) seuraa suoraan, että funktio f on jatkuva pisteessä a täsmälleen silloin, kun

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a),$$

funktio f on oikealta jatkuva pisteessä a täsmälleen silloin, kun

$$\lim_{h\to 0+} f(a+h) = f(a),$$

ja funktio f on vasemmalta jatkuva pisteessä a täsmälleen silloin, kun

$$\lim_{h\to 0-} f(a+h) = f(a).$$

Määritelmä 4.3. Funktio f on *jatkuva avoimella välillä* $]a,b[$, jos f on jatkuva jokaisessa välin pisteessä.

Määritelmä 4.4. Funktio f on *jatkuva suljetulla välillä* $[a,b]$, jos f on jatkuva välillä $]a,b[$ sekä oikealta jatkuva pisteessä a ja vasemmalta jatkuva pisteessä b.

Määritelmä 4.5. Funktio f on jatkuva välillä $[a,b[$, jos f on jatkuva välillä $]a,b[$ sekä oikealta jatkuva pisteessä a, ja f on jatkuva välillä $]a,b]$, jos f on jatkuva välillä $]a,b[$ sekä vasemmalta jatkuva pisteessä b.

Jatkuvuuden määritelmän ja luvun 3 esimerkkien perusteella saadaan suoraan seuraavat tulokset.

Esimerkki 4.1. Polynomifunktio $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ on jatkuva jokaisella reaalilukuvälillä, sillä esimerkin 3.12 (s. 71) perusteella

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$$

kaikilla $x_0 \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 4.2. Esimerkin 3.9 (s. 64) nojalla

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a$$

kaikilla $a \in \mathbf{R}$, joten $\sin x$ ja $\cos x$ ovat jatkuvia kaikilla reaalilukuväleillä.

Esimerkki 4.3. Esimerkkien 3.8 (s. 64) ja 3.19 (s. 77) perusteella

$$\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \quad (a > 0) \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0.$$

Siis $\sqrt{x}$ on jatkuva välillä $[0,\infty[$.

Esimerkki 4.4. Osoitetaan, että *Dirichlet'n funktio*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$

ei ole jatkuva missään joukon $\mathbf{R}$ pisteessä.

Olkoon siis $a \in \mathbf{R}$. Valitaan $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Olkoon $\delta > 0$. Koska väli $]a-\delta, a+\delta[$ sisältää sekä rationaali- että irrationaalilukuja (seuraus 1.21, s. 22), on olemassa sellainen $x_1 \in\,]a-\delta, a+\delta[$, että $x_1 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, jos $a \in \mathbf{Q}$, ja $x_1 \in \mathbf{Q}$, jos $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Siis

$$|f(x_1) - f(a)| \;=\; 1 \;>\; \tfrac{1}{2} \;=\; \varepsilon.$$

Siis ehto

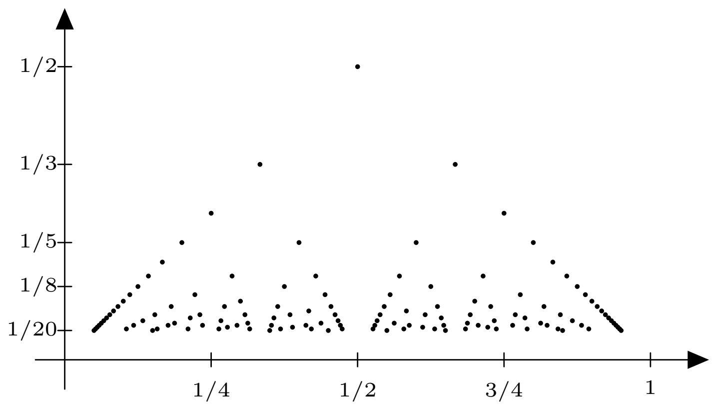
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \;\text{ aina, kun }\; |x - a| < \delta,$$

ei ole voimassa millään luvun $\delta > 0$ arvolla (kun $\varepsilon = \frac{1}{2}$). Täten f ei ole jatkuva pisteessä a (eikä siis missään joukon $\mathbf{R}$ pisteessä).

Esimerkki 4.5. *Thomaen funktio*[1]

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \\ 1, & \text{kun } x = 0, \\ \dfrac{1}{q}, & \text{kun } x \in \mathbf{Q} \text{ ja } x = \dfrac{p}{q} \;\; (p \neq 0, q > 0) \text{ on supistetussa muodossa}, \end{cases}$$

on jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ja epäjatkuva kaikilla $x \in \mathbf{Q}$ (harjoitustehtävä).



Kuva 4.1: Thomaen funktion arvot $\frac{1}{q}$ $(q = 1, 2, \ldots, 20)$ välillä $]0, 1[$.

[1]Funktiota kutsutaan myös popcorn-, sadepisara- tai viivotinfunktioksi.

Seuraavassa esimerkissä voitaisiin hyödyntää myös tietoa, että funktio on rajoitettu pisteen a jossakin (mahdollisesti puhkaistussa) ympäristössä, jos funktiolla on raja-arvo pisteessä a (lause 3.10, s. 67) tai funktio on jatkuva pisteessä a (lause 4.16, s. 99). Ratkaistaan tehtävä esimerkin vuoksi nyt kuitenkin käyttämällä suoraan jatkuvuuden määritelmää.

Esimerkki 4.6. Olkoon f sellainen pisteessä $x = 0$ jatkuva funktio, että

$$|f(x)| \leq \frac{1}{|x|} \qquad \forall x \neq 0.$$

Osoitetaan, että f on rajoitettu joukossa $\mathbf{R}$.

Koska f on jatkuva pisteessä $x = 0$, niin jatkuvuuden määritelmän nojalla on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(0)| < 1 \text{ aina, kun } |x - 0| < \delta.$$

Jos siis $|x| < \delta$, niin

$$|f(x)| = |f(0) + f(x) - f(0)| \leq |f(0)| + |f(x) - f(0)| < |f(0)| + 1.$$

Jos taas $|x| \geq \delta$, niin

$$|f(x)| \leq \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{\delta}.$$

Siis

$$|f(x)| \leq M = \max\{|f(0)| + 1, \frac{1}{\delta}\} \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Huomautus 4.4. Funktio f on epäjatkuva pisteessä a täsmälleen silloin, kun

(i) raja-arvo $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ei ole (äärellisenä) olemassa, tai

(ii) raja-arvo $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ on olemassa, mutta $f(a) \neq A$ tai $f(a)$ ei ole määritelty.

Esimerkki 4.7. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Tällöin $f(x)$ on jatkuva, kun $x \neq 0$ (ks. esimerkki 4.14, s. 97). Sen sijaan $f(x)$ ei ole jatkuva pisteessä $x = 0$, sillä esimerkin 3.10 (s. 66) mukaan raja-arvo $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ei ole olemassa (ks. myös kuva 3.2, s. 66).

Esimerkki 4.8. Funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = 0, \\ 0, & \text{kun } x \neq 0, \end{cases}$$

ei ole jatkuva pisteessä $x = 0$, sillä

$$\lim_{x \to 0} f(x) \;=\; 0 \;\neq\; 1 \;=\; f(0).$$

Huomautus. Jos funktio f ei ole määritelty pisteessä a, mutta raja-arvo

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

on äärellisenä olemassa, niin funktiolla f on pisteessä a *epäoleellinen* (tai *näennäinen*) epäjatkuvuuskohta. Muussa tapauksessa epäjatkuvuuskohta on *oleellinen*. Epäoleellisessa epäjatkuvuuskohdassa a funktio f saadaan jatkuvaksi asettamalla lisämääritelmä

$$f(a) = A.$$

Oleellisessa epäjatkuvuuskohdassa tämä ei ole mahdollista, vaan funktion raja-arvoa ei ole (äärellisenä) olemassa tai funktio on määritelty, mutta

$$f(a) \neq A.$$

Esimerkki 4.9. Funktio

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

ei ole jatkuva pisteessä $x = 0$, sillä f ei ole määritelty pisteessä $x = 0$. Funktion f epäjatkuvuuskohta pisteessä $x = 0$ on epäoleellinen, sillä esimerkin 3.14 (s. 71) nojalla

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Jos nyt määritellään

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

niin funktio g on jatkuva pisteessä $x = 0$.

Lause 4.5. *Jos funktio f on jatkuva pisteessä a, myös funktio $|f|$ on jatkuva pisteessä a.*

Todistus. Käänteisen kolmioepäyhtälön (seuraus 1.9, s. 12) nojalla

$$\big||f(x)| - |f(a)|\big| \;\leq\; |f(x) - f(a)|$$

kaikilla $x, a \in \mathbf{R}$, joten väite seuraa suoraan jatkuvuuden määritelmästä. □

Huomautus. Lause 4.5 ei ole kääntäen voimassa. Jos esimerkiksi

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \geq 0, \\ -1, & \text{kun } x < 0, \end{cases}$$

niin $|f|$ on jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R}$, mutta f on epäjatkuva pisteessä $x = 0$ (harjoitustehtävä).

4.2 Jatkuvia funktioita koskevia tuloksia

Seuraavaksi esitetään muutamia jatkuvia funktioita koskevia tuloksia. Tulokset pätevät asianmukaisesti muunnettuina myös vain oikealta tai vasemmalta jatkuville funktioille. Useassa kohden asiasta on myös erillinen huomautus.

Lause 4.6. *Olkoot f ja g pisteessä a jatkuvia funktioita. Tällöin myös funktiot*

$$f+g,\quad f-g,\quad fg,\quad kf\ (k\in\mathbf{R})\ \text{ ja }\ \frac{f}{g}\ (\text{kun } g(a)\neq 0)$$

ovat jatkuvia pisteessä a.

Todistus. Tulokset seuraavat suoraan vastaavasta funktioiden raja-arvoa koskevasta lauseesta 3.14 (s. 70). □

Huomautus 4.7. Olkoot f ja g välillä I jatkuvia funktioita. Tällöin myös funktiot

$$f+g,\quad f-g,\quad fg,\quad kf\ (k\in\mathbf{R})\ \text{ ja }\ \frac{f}{g}\ (\text{kun } g(x)\neq 0\ \ \forall x\in I)$$

ovat jatkuvia välillä I (harjoitustehtävä).

Esimerkki 4.10. Polynomifunktio on jatkuva kaikilla $x\in\mathbf{R}$ (esimerkki 4.1, s. 90), joten rationaalifunktio

$$r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}\qquad (p(x),\ q(x) \text{ ovat polynomifunktioita})$$

on lauseen 4.6 perusteella jatkuva kaikilla $x\in\mathbf{R}$ lukuun ottamatta pisteitä, joissa $q(x)=0$.

Esimerkki 4.11. Vakiofunktio (esimerkki 4.1, s. 90) ja $\cos x$ (esimerkki 4.2, s. 90) ovat jatkuvia kaikilla $x\in\mathbf{R}$. Siis lauseen 4.6 nojalla funktio

$$f(x)=\frac{1}{1-2\cos x}$$

on jatkuva kaikilla $x\in\mathbf{R}$, joille $2\cos x\neq 1$ eli $x\neq \pm\frac{\pi}{3}+k\,2\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Huomautus 4.8. Jos funktio f on jatkuva ja funktio g on epäjatkuva pisteessä a, niin funktio $f+g$ on epäjatkuva pisteessä a.

Huomautus. Jos funktiot f ja g ovat molemmat epäjatkuvia pisteessä a, niin funktio $f+g$ saattaa silti olla jatkuva pisteessä a (ks. esimerkki 4.12).

Esimerkki 4.12. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \geq 0, \\ 0, & \text{kun } x < 0, \end{cases}$$

ja

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } x \geq 0, \\ 0, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Toispuoleisia raja-arvoja tutkimalla havaitaan helposti, että f ja g ovat epäjatkuvia pisteessä $x = 0$. Kuitenkin

$$(f+g)(x) \;=\; f(x) + g(x) \;=\; 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

joka on vakiofunktiona jatkuva pisteessä $x = 0$.

Huomautus 4.9. Jos f on sellainen pisteessä a jatkuva funktio, että $f(a) \neq 0$, ja funktio g epäjatkuva pisteessä a, niin funktio fg on epäjatkuva pisteessä a.

Huomautus. Jos f on sellainen pisteessä a jatkuva funktio, että $f(a) = 0$, ja funktio g on epäjatkuva pisteessä a, niin funktio fg saattaa olla jatkuva pisteessä a (ks. esimerkki 4.13).

Esimerkki 4.13. Olkoon $f(x) = x^2$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \geq 0, \\ 0, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Tällöin

$$(fg)(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x \geq 0, \\ 0, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Siis f on jatkuva pisteessä $x = 0$ ja g on epäjatkuva pisteessä $x = 0$, mutta fg on jatkuva pisteessä $x = 0$ (harjoitustehtävä).

Lause 4.10. *Jos f on jatkuva pisteessä a ja g on jatkuva pisteessä $f(a)$, niin $g \circ f$ on jatkuva pisteessä a.*

Todistus. Koska f on jatkuva pisteessä a, niin

$$\lim_{x \to a} f(x) \;=\; f(a),$$

ja koska g on jatkuva pisteessä $f(a)$, niin

$$\lim_{y \to f(a)} g(y) \;=\; g(f(a)).$$

Täten lauseen 3.16 (s. 72) nojalla

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) \;=\; \lim_{x \to a} g(f(x)) \;=\; g(f(a)).$$

Siis jatkuvuuden määritelmän nojalla $g \circ f$ on jatkuva pisteessä a. $\square$

Huomautus 4.11. Lause 4.10 pätee myös, kun ulkofunktio g on vain oikealta (tai vasemmalta) jatkuva (harjoitustehtävä). Tällöin on lisäksi oletettava, että jossakin pisteen a ympäristössä sisäfunktion f arvot ovat suurempia (tai pienempiä) tai yhtäsuuria kuin $f(a)$.

Huomautus 4.12. Lause 4.10 pätee myös, kun sisäfunktio f (ja mahdollisesti myös ulkofunktio g, ks. huomautus 4.11) on vain oikealta (tai vasemmalta) jatkuva (harjoitustehtävä). Tällöin yhdistetty funktio $g \circ f$ on vastaavalla tavalla oikealta (tai vasemmalta) jatkuva.

Esimerkki 4.14. Olkoon

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \text{ja} \qquad g(x) = \sin x.$$

Tällöin f on jatkuva kaikilla $x \neq 0$ (esimerkki 4.10, s. 95) ja g on jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R}$ (esimerkki 4.2, s. 90). Siis lauseen 4.10 nojalla

$$(g \circ f)(x) \;=\; g(f(x)) \;=\; \sin \frac{1}{x}$$

on jatkuva, kun $x \neq 0$ (vrt. esimerkki 4.7, s. 92).

Lause 4.13. *Jos funktio f on jatkuva pisteessä a ja $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, niin*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Todistus. Ks. lukujonon ja funktion raja-arvojen välinen yhteys (lause 3.13, s. 68). □

Lause 4.13 pätee myös, kun funktio on pelkästään oikealta tai vasemmalta jatkuva. Tällöin on kuitenkin lisäksi oletettava, että lukujonon arvot sijaitsevat jatkuvuuden kannalta sopivalla alueella.

Huomautus 4.14. Jos funktio f on oikealta jatkuva pisteessä a ja $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ sekä on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbf{Z}_+$, että $x_n \geq a$ kaikilla $n > n_0$, niin

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Todistus. Harjoitustehtävä.

Huomautus 4.15. Jos funktio f on vasemmalta jatkuva pisteessä a ja $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ sekä on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbf{Z}_+$, että $x_n \leq a$ kaikilla $n > n_0$, niin

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Todistus. Harjoitustehtävä.

Esimerkki 4.15. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

ja

$$x_n = \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

Nyt f on jatkuva pisteessä $x = 0$ (esimerkki 4.9, s. 93) ja $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, joten lauseen 4.13 nojalla

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = f(0) \qquad \text{eli} \qquad \lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = 1$$

(vrt. esimerkki 3.30, s. 87).

Funktion raja-arvoa koskevasta lauseesta 3.10 (s. 67) seuraa suoraan, että pisteessä a jatkuva funktio on rajoitettu pisteen a jossakin ympäristössä.

Lause 4.16. *Jos funktio f on jatkuva pisteessä a, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että f on rajoitettu pisteen a ympäristössä $\mathrm{U}_\delta(a)$ eli välillä $]a-\delta, a+\delta[$.*

Lause 4.16 pätee myös, kun funktio on pelkästään oikealta tai vasemmalta jatkuva. Tällöin on tarkasteltava pisteen a ympäristön sijasta pelkästään pisteen a oikealla tai vasemmalla puolella olevaa aluetta.

Huomautus 4.17. Jos funktio f on oikealta jatkuva pisteessä a, niin on olemassa sellainen $\delta_1 > 0$, että f on rajoitettu välillä $[a, a+\delta_1[$, ja jos funktio f on vasemmalta jatkuva pisteessä a, niin on olemassa sellainen $\delta_2 > 0$, että f on rajoitettu välillä $]a-\delta_2, a]$.

Todistus. Harjoitustehtävä.

Lauseen 3.11 (s. 67) ja seurauksen 3.12 (s. 68) perusteella saadaan vastaavasti seuraavat tulokset.

Lause 4.18. *Jos funktio f on jatkuva pisteessä a ja $f(a) > 0$, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että*

$$f(x) > 0 \qquad \forall x \in \mathrm{U}_\delta(a).$$

Lause 4.19. *Jos funktio f on jatkuva pisteessä a ja $f(a) > 0$, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$ ja sellainen $K > 0$, että*

$$f(x) \geq K \qquad \forall x \in \mathrm{U}_\delta(a).$$

Lause 4.20. *Jos funktio f on jatkuva pisteessä a ja $f(a) < 0$, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että*

$$f(x) < 0 \qquad \forall x \in \mathrm{U}_\delta(a).$$

Lause 4.21. *Jos funktio f on jatkuva pisteessä a ja $f(a) < 0$, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$ ja sellainen $K < 0$, että*

$$f(x) \leq K \qquad \forall x \in \mathrm{U}_\delta(a).$$

Huomautus 4.22. Lauseet 4.18–4.21 pätevät myös, kun funktio on pelkästään oikealta tai vasemmalta jatkuva (harjoitustehtävä). Tällöinkin on tarkasteltava pisteen a ympäristön sijasta pisteen a oikealla tai vasemmalla puolella olevaa aluetta.

Jos esimerkiksi funktio f on vasemmalta jatkuva pisteessä a ja $f(a) > 0$, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$f(x) > 0 \qquad \forall x \in \left]a - \delta, a\right],$$

ja jos f on oikealta jatkuva pisteessä a ja $f(a) < 0$, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$f(x) < 0 \qquad \forall x \in [a, a + \delta[.$$

Esimerkki 4.16. Olkoot $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ja $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sellaisia jatkuvia funktioita, että

$$f(x) = g(x) \qquad \forall x \in \mathbf{Q}.$$

Osoitetaan, että tällöin

$$f(x) = g(x) \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Merkitään $h(x) = f(x) - g(x)$. Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellainen $a \in \mathbf{R}$, että $f(a) \neq g(a)$ eli $h(a) \neq 0$. Olkoon esimerkiksi $h(a) > 0$ (tapaus $h(a) < 0$ todistetaan vastaavasti). Koska h on lauseen 4.6 (s. 95) nojalla jatkuva pisteessä a, niin lauseen 4.18 nojalla on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$h(x) > 0 \qquad \forall x \in \mathrm{U}_\delta(a).$$

Nyt ympäristöön $\mathrm{U}_\delta(a)$ (eli väliin $]a-\delta, a+\delta[$) kuuluu ainakin yksi rationaaliluku x_r (seuraus 1.19, s. 22). Tällöin

$$h(x_r) \;=\; f(x_r) - g(x_r) \;=\; 0,$$

missä on ristiriita. Siis väite on todistettu.

4.3 Suljetulla välillä jatkuvan funktion ominaisuuksia

Luvussa 4.3 tullaan osoittamaan seuraavat kolme suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuvan funktion f ominaisuutta, jotka geometrisesti ajatellen ovat ilmeisiä.

1. Jos $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset, niin on olemassa sellainen $c \in]a, b[$, että $f(c) = 0$ (lause 4.23).
2. Funktio f on rajoitettu välillä $[a, b]$ (lause 4.25).
3. Funktio f saavuttaa joissakin välin $[a, b]$ pisteissä suurimman ja pienimmän arvonsa (lause 4.26).

Ominaisuuksia ei kuitenkaan pystytä täsmällisesti todistamaan käyttämättä täydellisyysaksioomaa tai siitä seuraavia lauseita.

Lause 4.23 (Bolzanon lause)**.** *Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$. Jos $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset, niin on olemassa sellainen $c \in]a, b[$, että $f(c) = 0$.*

Todistus. Todistuksen yleispätevyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$. Olkoon nyt

$$E = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}.$$

Koska $a \in E$, niin $E \neq \emptyset$, ja koska $E \subseteq [a, b]$, niin E on ylhäältä rajoitettu. Siis joukolla E on pienin yläraja. Merkitään

$$c = \sup E.$$

Osoitetaan ensin, että $c \in]a, b[$.

Koska $f(a) < 0$ ja f on oikealta jatkuva pisteessä a, niin huomautuksen 4.22 (s. 100) nojalla on olemassa sellainen $\delta_1 > 0$, että

$$f(x) < 0 \qquad \forall x \in [a, a + \delta_1[.$$

Siis

$$x \in E \qquad \forall x \in [a, a + \delta_1[,$$

joten

$$a + \delta_1 \le c. \tag{4.1}$$

Koska $f(b) > 0$ ja f on vasemmalta jatkuva pisteessä b, niin myöskin huomautuksen 4.22 nojalla on olemassa sellainen $\delta_2 > 0$, että

$$f(x) > 0 \qquad \forall x \in]b - \delta_2, b].$$

Siis

$$x \notin E \qquad \forall x \in \left]b - \delta_2, b\right],$$

joten

$$c \leq b - \delta_2. \tag{4.2}$$

Yhdistämällä (4.1) ja (4.2) saadaan

$$a + \delta_1 \leq c \leq b - \delta_2,$$

joten $c \in \left]a, b\right[$.

Osoitetaan sitten, että $f(c) = 0$. Jos $f(c) > 0$, niin lauseen 4.18 (s. 99) nojalla on olemassa sellainen $\delta > 0$, että[1]

$$f(x) > 0 \qquad \forall x \in \mathrm{U}_\delta(c).$$

Tällöin joukossa E ei olisi suurempia lukuja kuin $c - \delta$, mikä on mahdotonta, koska $c = \sup E$. Siis ei ole mahdollista, että $f(c) > 0$.

Jos taas $f(c) < 0$, niin lauseen 4.20 (s. 99) nojalla on olemassa sellainen $\delta' > 0$, että[1]

$$f(x) < 0 \qquad \forall x \in \mathrm{U}_{\delta'}(c).$$

Tällöin joukossa E olisi suurempia lukuja kuin c (esimerkiksi $c + \frac{\delta'}{2}$), mikä on mahdotonta, koska $c = \sup E$. Siis ei ole mahdollista, että $f(c) < 0$.

Siis ainoa mahdollisuus on, että $f(c) = 0$. $\square$

Seuraus 4.24.[2] *Olkoon f sellainen suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuva funktio, että $f(a) \neq f(b)$. Jos tällöin y on lukujen $f(a)$ ja $f(b)$ välissä, niin on olemassa sellainen $c \in \left]a, b\right[$, että $f(c) = y$.*

Todistus. Sovelletaan Bolzanon lausetta funktioon $f(x) - y$. $\square$

Huomautus. Bolzanon lauseessa tarvitaan todella jatkuvuutta koko suljetulla välillä $[a, b]$. Lause ei välttämättä päde, jos f on epäjatkuva yhdessäkin välin pisteessä (ks. esimerkki 4.17).

---

[1] Voidaan tietysti olettaa, että $\left]c - \delta, c + \delta\right[\subseteq [a, b]$ ja $\left]c - \delta', c + \delta'\right[\subseteq [a, b]$.

[2] Seurauksesta käytetään joskus nimitystä *jatkuvien funktioiden väliarvolause.*

Esimerkki 4.17. Olkoon $f\colon [0,2] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } 0 \le x < 1, \\ 1, & \text{kun } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Funktio f on selvästi jatkuva välillä $[0,2]$ lukuun ottamatta pistettä $x = 1$. Lisäksi $f(0) < 0$ ja $f(2) > 0$. Kuitenkaan ei ole olemassa sellaista pistettä $c \in \,]0,2[$, että $f(c) = 0$.

Lause 4.25. *Suljetulla välillä $[a,b]$ jatkuva funktio f on tällä välillä rajoitettu.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että f ei ole välillä $[a,b]$ rajoitettu. Olkoon $a_1 = a$, $b_1 = b$ ja $I_1 = [a_1, b_1]$ sekä

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

välin I_1 keskipiste. Tällöin ainakin toinen osaväleistä $[a_1, c_1]$ ja $[c_1, b_1]$ on sellainen, että f ei ole tällä välillä rajoitettu. Merkitään sitä $I_2 = [a_2, b_2]$. Jos f ei ole kummallakaan osavälillä rajoitettu, valitaan $I_2 = [a_1, c_1]$.

Olkoon sitten

$$c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

välin I_2 keskipiste. Tällöin ainakin toinen osaväleistä $[a_2, c_2]$ ja $[c_2, b_2]$ on sellainen, että f ei ole tällä välillä rajoitettu. Merkitään sitä $I_3 = [a_3, b_3]$. Jos f ei ole kummallakaan osavälillä rajoitettu, valitaan $I_3 = [a_2, c_2]$.

Jatketaan menettelyä siten, että jos

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

on välin I_k keskipiste, niin valitaan osaväleistä $[a_k, c_k]$ ja $[c_k, b_k]$ se, kummalla f ei ole rajoitettu, ja merkitään sitä $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$. Jos f ei ole kummallakaan osavälillä rajoitettu, valitaan $I_{k+1} = [a_k, c_k]$.

Näin saadaan jono ($k = 1, 2, \ldots$) suljettuja välejä $I_k = [a_k, b_k]$, joille $I_{k+1} \subseteq I_k$. Edelleen välin pituus

$$b_k - a_k \;=\; \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} \;=\; \cdots \;=\; \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \;=\; \frac{b-a}{2^{k-1}} \;\to\; 0, \quad \text{kun } k \to \infty.$$

Täten sisäkkäisten välien lauseen (lause 2.25, s. 51) perusteella on olemassa sellainen $x_0 \in \mathbf{R}$, että

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] \;=\; \{x_0\}\,.$$

Koska $x_0 \in [a,b]$ ja f on jatkuva välillä $[a,b]$, niin lauseen 4.16 (s. 99) ja sitä seuraavan huomautuksen 4.17 nojalla on olemassa sellainen $\delta > 0$, että f on välillä $]x_0-\delta, x_0+\delta[\,\cap\,[a,b]$ rajoitettu. Lisäksi $b_k - a_k \to 0$, kun $k \to \infty$, joten on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbf{Z}_+$, että

$$b_{k_0} - a_{k_0} \;<\; \delta.$$

Koska $x_0 \in [a_{k_0}, b_{k_0}]$, niin

$$[a_{k_0}, b_{k_0}] \;\subseteq\;]x_0-\delta, x_0+\delta[\,\cap\,[a,b]\,.$$

Siis f on välillä $[a_{k_0}, b_{k_0}]$ rajoitettu, missä on ristiriita (sillä väli $[a_{k_0}, b_{k_0}]$ muodostettiin siten, että f ei ole tällä välillä rajoitettu). □

Huomautus. Lause 4.25 ei välttämättä ole voimassa, mikäli funktiolla f on välillä $[a,b]$ yksikin epäjatkuvuuskohta (ks. esimerkki 4.19).

Esimerkki 4.18. Polynomifunktio $p(x)$ on jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R}$, joten se on rajoitettu jokaisella välillä $[a,b] \subset \mathbf{R}$.

Esimerkki 4.19. Olkoon $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{kun } 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Funktio f on selvästi jatkuva välillä $[0,1]$ lukuun ottamatta pistettä $x = 0$. Kuitenkaan f ei ole rajoitettu välillä $[0,1]$.

Lause 4.26. *Suljetulla välillä $[a,b]$ jatkuva funktio f saavuttaa tällä välillä suurimman ja pienimmän arvonsa.*

Todistus. Lauseen 4.25 nojalla f on ylhäältä rajoitettu välillä $[a,b]$, joten on olemassa

$$M \;=\; \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}\,.$$

Osoitetaan, että on olemassa sellainen $c \in [a,b]$, että $f(c) = M$.

Tehdään vastaoletus, että

$$f(x) \neq M \qquad \forall x \in [a,b].$$

Koska $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$, niin tällöin

$$f(x) < M \qquad \forall x \in [a,b].$$

Täten funktio
$$g(x) \;=\; \frac{1}{M - f(x)}$$
on huomautuksen 4.7 (s. 95) nojalla jatkuva välillä $[a, b]$. Siis g on lauseen 4.25 nojalla ylhäältä rajoitettu välillä $[a, b]$, joten on olemassa sellainen $M' > 0$, että
$$\frac{1}{M - f(x)} \;\leq\; M' \qquad \forall x \in [a, b]$$
eli
$$\frac{1}{M'} \;\leq\; M - f(x) \qquad \forall x \in [a, b].$$
Siis
$$f(x) \;\leq\; M - \overbrace{\frac{1}{M'}}^{>0} \qquad \forall x \in [a, b].$$
Mutta koska $M = \sup\{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}$, tämä on mahdotonta.

Näin ollen täytyy olla olemassa ainakin yksi sellainen piste $c \in [a, b]$, että $f(c) = M$. Siis f saavuttaa välillä $[a, b]$ suurimman arvonsa.

Täysin vastaavalla tavalla infimumia tarkastelemalla voidaan osoittaa, että f saavuttaa välillä $[a, b]$ myös pienimmän arvonsa (harjoitustehtävä). □

Huomautus 4.27. Lauseen 4.26 tulos voidaan esittää myös muodossa
$$\exists\, c_1 \in [a, b]\colon\;\; f(c_1) \;=\; \sup_{x \in [a,b]} f(x) \;=\; \sup\{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}$$
ja
$$\exists\, c_2 \in [a, b]\colon\;\; f(c_2) \;=\; \inf_{x \in [a,b]} f(x) \;=\; \inf\{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}\,.$$

Seuraus 4.28. *Jos funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin välin $[a, b]$ kuvajoukko $f([a, b])$ on suljettu väli tai yksittäinen piste.*

Todistus. Lauseen 4.26 nojalla f saavuttaa välillä $[a, b]$ suurimman arvonsa M ja pienimmän arvonsa m. Jos $m = M$, niin f on vakiofunktio, jonka kuvajoukko on $\{M\}$ (eli kuvajoukko sisältää vain pisteen M). Jos taas $m < M$, niin Bolzanon lauseen seurauksen (seuraus 4.24) mukaan f saa jokaisen arvojen m ja M välillä olevan arvon. Siis $f([a, b]) = [m, M]$. □

Huomautus. Lause 4.26 ei välttämättä ole voimassa, jos funktiolla f on välillä $[a, b]$ yksikin epäjatkuvuuskohta (ks. esimerkki 4.20).

Esimerkki 4.20. Olkoon $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x < 1, \\ 0, & \text{kun } x = 1. \end{cases}$$

Polynomina f on jatkuva välillä $[0,1]$ lukuun ottamamatta välin päätepistettä $x = 1$. Kuitenkaan funktiolla f ei ole suurinta arvoa välillä $[0,1]$ (vaikka f on rajoitettu).

Esimerkki 4.21. Osoitetaan, että jos f on jatkuva välillä $[a,b]$ ja

$$f(x) > 0 \qquad \forall x \in [a,b],$$

niin on olemassa sellainen $m > 0$, että

$$f(x) \geq m \qquad \forall x \in [a,b].$$

Todistus. Lauseen 4.26 nojalla (huomautus 4.27) on olemassa sellainen $c \in [a,b]$, että

$$f(c) \;=\; \inf_{x \in [a,b]} f(x) \;=\; m.$$

Tällöin $m = f(c) > 0$ ja

$$f(x) \geq m \qquad \forall x \in [a,b].$$

4.4 Käänteisfunktion jatkuvuudesta

Yleisesti ottaen funktiolla ei välttämättä ole käänteisfunktiota, sillä käänteisfunktion olemassaolo edellyttää bijektiivisen kuvauksen (ks. luku 3.1). Jos kuitenkin funktio on jollakin välillä aidosti monotoninen ja jatkuva, niin funktio on bijektio ja sillä on käänteiskuvaus (joka myös on aidosti monotoninen ja jatkuva).

Lause 4.29. *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ sellainen aidosti kasvava ja jatkuva funktio, että $f(a) = A$ ja $f(b) = B$. Tällöin funktiolla $f\colon [a,b] \to [A,B]$ on käänteisfunktio $f^{-1}\colon [A,B] \to [a,b]$, joka on välillä $[A,B]$ aidosti kasvava ja jatkuva.*

Todistus. 1°: Osoitetaan ensin, että f on bijektio, jolloin funktiolla f on käänteisfunktio $f^{-1}\colon [A,B] \to [a,b]$. Koska f on aidosti kasvava, niin

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)$$

kaikilla $x_1, x_2 \in [a,b]$. Siis kuvaus $f\colon [a,b] \to [A,B]$ on injektio.

Lisäksi $f(a) = A$, $f(b) = B$ ja f on aidosti kasvava sekä jatkuva, joten seurauksen 4.28 todistuksen nojalla $f([a,b]) = [A,B]$ ja kuvaus $f\colon [a,b] \to [A,B]$ on surjektio.

Siis funktio $f\colon [a,b] \to [A,B]$ on bijektio, joten on olemassa käänteisfunktio $f^{-1}\colon [A,B] \to [a,b]$.

2°: Osoitetaan sitten, että käänteisfunktio f^{-1} on aidosti kasvava välillä $[A,B]$. Oletetaan, että $y_1, y_2 \in [A,B]$ ja $y_1 < y_2$. Tällöin on olemassa sellaiset $x_1, x_2 \in [a,b]$, että $f(x_1) = y_1$ ja $f(x_2) = y_2$. Lisäksi siis $f(x_1) < f(x_2)$. Koska f on aidosti kasvava, niin tällöin myös $x_1 < x_2$ eli

$$f^{-1}(y_1) \;=\; x_1 \;<\; x_2 \;=\; f^{-1}(y_2).$$

Siis funktio f^{-1} on aidosti kasvava välillä $[A,B]$.

3°: Osoitetaan lopuksi, että f^{-1} on jatkuva välillä $[A,B]$. Oletetaan ensin, että $y_0 \in \,]A,B[$. Koska $f(a) = A$, $f(b) = B$ ja f on bijektio, on tällöin olemassa sellainen $x_0 \in \,]a,b[$, että

$$f(x_0) = y_0 \qquad \text{ja} \qquad f^{-1}(y_0) = x_0. \tag{4.3}$$

Valitaan nyt mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Todistuksen yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että $\varepsilon < \min\{x_0 - a, b - x_0\}$ eli $\mathrm{U}_\varepsilon(x_0) \subset \,]a,b[$ eli

$$a \;<\; x_0 - \varepsilon \;<\; x_0 \;<\; x_0 + \varepsilon \;<\; b.$$

Koska f on aidosti kasvava, niin tällöin

$$f(x_0 - \varepsilon) \; < \; y_0 \; < \; f(x_0 + \varepsilon).$$

Merkitään $\delta = \min\{y_0 - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - y_0\}$. Tällöin $\delta > 0$ ja

$$]y_0 - \delta, y_0 + \delta[\; \subseteq \;]f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)[\,, \tag{4.4}$$

joten

$$\begin{aligned}
y \in \mathrm{U}_\delta(y_0) \quad & \Rightarrow \quad y \in \;]y_0 - \delta, y_0 + \delta[\\
& \overset{(4.4)}{\Rightarrow} \quad y \in \;]f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)[\\
& \overset{f^{-1} \text{ aid. kasv.}}{\Rightarrow} \quad f^{-1}(y) \in \Big]f^{-1}(f(x_0 - \varepsilon)), f^{-1}(f(x_0 + \varepsilon))\Big[\\
& \overset{f \text{ bijektio}}{\Rightarrow} \quad f^{-1}(y) \in \;]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\\
& \overset{(4.3)}{\Rightarrow} \quad f^{-1}(y) \in \;]f^{-1}(y_0) - \varepsilon, f^{-1}(y_0) + \varepsilon[\\
& \Rightarrow \quad f^{-1}(y) \in \mathrm{U}_\varepsilon(f^{-1}(y_0)).
\end{aligned}$$

Siis

$$f^{-1}(y) \in \mathrm{U}_\varepsilon(f^{-1}(y_0)) \text{ aina, kun } y \in \mathrm{U}_\delta(y_0),$$

joten huomautuksen 4.1 (s. 89) nojalla f^{-1} jatkuva pisteessä y_0.

Täysin yllä olevan kanssa analogisella tavalla voidaan todistaa, että f^{-1} on oikealta jatkuva pisteessä A ja vasemmalta jatkuva pisteessä B (harjoitustehtävä). Siis f^{-1} on jatkuva välillä $[A, B]$. □

Lause 4.30. *Olkoon $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ sellainen aidosti vähenevä ja jatkuva funktio, että $f(a) = A$ ja $f(b) = B$. Tällöin funktiolla $f\colon [a, b] \to [B, A]$ on käänteisfunktio $f^{-1}\colon [B, A] \to [a, b]$, joka on välillä $[B, A]$ aidosti vähenevä ja jatkuva.*

Todistus. Kuten lause 4.29 (harjoitustehtävä). □

Huomautus 4.31. Lauseet 4.29 ja 4.30 voidaan yleistää koskemaan minkä tahansa tyyppistä väliä I (harjoitustehtävä).

Esimerkki 4.22. Olkoon $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) \; = \; x^3 + 3x - 3.$$

Tutkitaan funktion f käänteisfunktion olemassaoloa jollakin (mielivaltaisella) suljetulla reaalilukuvälillä $[a, b]$. Polynomina f on selvästi jatkuva välillä $[a, b]$. Lisäksi funktio f on välillä $[a,b]$ aidosti kasvava, sillä jos $x_1, x_2 \in [a,b]$, niin

$$\begin{aligned}
f(x_1) < f(x_2) &\Leftrightarrow\ x_1^3 + 3x_1 - 3 \ <\ x_2^3 + 3x_2 - 3 \\
&\Leftrightarrow\ x_1^3 - x_2^3 + 3(x_1 - x_2) \ <\ 0 \\
&\Leftrightarrow\ (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \ +\ 3(x_1 - x_2) \ <\ 0 \\
&\Leftrightarrow\ (x_1 - x_2)\Big(\underbrace{\Big(x_1 + \frac{x_2}{2}\Big)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{3x_2^2}{4}}_{\geq 0} + 3\Big) < 0 \\
&\Leftrightarrow\ x_1 - x_2 \ <\ 0 \\
&\Leftrightarrow\ x_1 < x_2.
\end{aligned}$$

Näin ollen funktiolla $f\colon\ [a,b] \to [f(a), f(b)]$ on lauseen 4.29 nojalla käänteisfunktio $f^{-1}\colon [f(a), f(b)] \to [a,b]$, joka on välillä $[f(a), f(b)]$ jatkuva ja aidosti kasvava.

Esimerkki 4.23. Olkoon $f\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$,

$$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

Funktio f on jatkuva (esimerkki 4.1, s. 90) ja selvästi aidosti kasvava välillä $[0,\infty[$. Koska $f(0) = 0$, niin lauseen 4.29 perusteella millä tahansa suljetulla välillä $[0,b]$ ($b > 0$) funktiolla $f\colon [0,b] \to [0,b^n]$ on käänteisfunktio $f^{-1}\colon [0,b^n] \to [0,b]$, joka on jatkuva ja aidosti kasvava. Huomautuksen 4.31 nojalla käänteisfunktio, jota merkitään

$$\sqrt[n]{x} \qquad \text{tai} \qquad x^{\frac{1}{n}},$$

on olemassa itse asiassa koko välillä $[0,\infty[$. Koska selvästi

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty,$$

niin funktiolla $f\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$ on käänteisfunktio $f^{-1}\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$, joka on jatkuva ja aidosti kasvava välillä $[0,\infty[$.

Käyttämällä lisäksi kaavoja (ks. s. 15)

$$x^0 = 1 \quad \text{ja} \quad x^{-n} = \Big(\frac{1}{x}\Big)^n \quad (x > 0)$$

sekä

$$x^{\frac{m}{n}} = \Big(x^{\frac{1}{n}}\Big)^m \qquad (x \geq 0,\ m \in \mathbf{Z}_+)$$

saadaan yhdistetyn funktion jatkuvuuden (lause 4.10 sekä huomautukset 4.11 ja 4.12, s. 97) nojalla (harjoitustehtävä), että rationaalinen potenssifunktio x^q on jatkuva välillä $]0,\infty[$, kun $q \in \mathbf{Q}$, ja välillä $[0,\infty[$, kun $q \in \mathbf{Q}_+$.

4.5 Tasainen jatkuvuus

Jatkuvuuden määritelmässä kiinnitetään ensin piste a. Sen jälkeen etsitään jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ aina, kun } |x - a| < \delta.$$

Yleensä luku δ riippuu paitsi funktiosta f ja luvusta ε myös pisteestä a. Jos kuitenkin jollakin välillä jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti löytyy sellainen $\delta > 0$, että δ ei riipu valitusta välin pisteestä, sanotaan funktion f olevan tasaisesti jatkuva tällä välillä.

Määritelmä 4.6. Funktio f on *tasaisesti jatkuva* välillä I, jos jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \text{ aina, kun } x_1, x_2 \in I \text{ ja } |x_1 - x_2| < \delta.$$

Huomautus. Jos funktio f on jollakin välillä tasaisesti jatkuva, funktio f on tällä välillä myös jatkuva.

Huomautus. Jos funktio f on tasaisesti jatkuva välillä I, funktio f on tasaisesti jatkuva myös jokaisella osavälillä $I' \subseteq I$.

Huomautus. Tasainen jatkuvuus on oleellisesti väliin liittyvä käsite. Tavallinen jatkuvuus taas on oleellisesti yhteen pisteeseen liittyvä (lokaali) käsite.

Esimerkki 4.24. Osoitetaan, että funktio

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0)$$

on tasaisesti jatkuva välillä $I =]\,\frac{1}{2}, 1[$.

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Merkitään $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, ja oletetaan, että $x_1, x_2 \in I$ ja $|x_1 - x_2| < \delta$. Tällöin $x_1, x_2 > \frac{1}{2}$, joten

$$\begin{aligned}
|f(x_1) - f(x_2)| &= \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}\right| = \frac{1}{x_1 x_2} \cdot |x_1 - x_2| \\
&\leq 4 \cdot |x_1 - x_2| \\
&< 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tulos seuraa nyt suoraan tasaisen jatkuvuuden määritelmästä.

Esimerkki 4.25. Osoitetaan, että funktio

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0)$$

ei ole tasaisesti jatkuva välillä $]0, 1[$.

Olkoon $\varepsilon = 1$ ja $\delta > 0$. Olkoon lisäksi $a > \max\{1, \frac{1}{\delta}\}$ ja

$$x_1 = \frac{1}{a} \qquad \text{ja} \qquad x_2 = \frac{1}{a+1}.$$

Tällöin

$$x_1, x_2 \in]0, 1[\qquad \text{ja} \qquad \frac{1}{a} < \delta.$$

Lisäksi

$$|x_1 - x_2| \;=\; \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\right| \;=\; \left|\frac{(a+1) - a}{a(a+1)}\right| \;=\; \frac{1}{a(a+1)} \;<\; \frac{1}{a} \;<\; \delta,$$

mutta

$$|f(x_1) - f(x_2)| \;=\; \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| \;=\; |a - (a+1)| \;=\; 1 \;\geq\; \varepsilon.$$

Siis tasaisen jatkuvuuden ehto ei voi olla voimassa.

Lause 4.32. *Jos funktiot f ja g ovat tasaisesti jatkuvia välillä I, myös funktiot cf ($c \in \mathbf{R}$) ja $f + g$ ovat tasaisesti jatkuvia välillä I.*

Todistus. Harjoitustehtävä.

Lause 4.33. *Suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuva funktio on tällä välillä tasaisesti jatkuva.*

Todistus. Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$. Tehdään vastaoletus, että f ei ole tasaisesti jatkuva välillä $[a, b]$. Tällöin on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että

$$\forall \delta > 0\colon \exists\, x, y \in [a, b] \;\text{ s.e. }\; |x - y| < \delta \;\text{ ja }\; |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Valitaan nyt lukuja $\delta = 1/n$ ($n = 1, 2, \ldots$) vastaavat pisteet $x_n, y_n \in [a, b]$, joille

$$|x_n - y_n| \;<\; \delta \;=\; \frac{1}{n} \qquad \text{ja} \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \;\geq\; \varepsilon. \tag{4.5}$$

Koska $x_n \in [a, b]$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$, niin lukujono (x_n) on rajoitettu. Täten Bolzano-Weierstrassin lauseen (lause 2.26, s. 52) nojalla lukujonolla (x_n) on suppeneva osajono (x_{n_k}). Lisäksi Bolzano-Weierstrassin lauseen todistuksen perusteella osajono (x_{n_k}) suppenee kohti pistettä $x_0 \in [a, b]$. Koska

$$|x_n - y_n| \;<\; \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+,$$

myös lukujono (y_{n_k}) suppenee kohti samaa pistettä x_0 (harjoitustehtävä).

Koska f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin lauseen 4.13 (s. 98) ja sitä koskevien huomautusten 4.14 ja 4.15 perusteella

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \;=\; f(x_0) \;=\; \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}).$$

Tässä on kuitenkin ristiriita, sillä ehdon (4.5) nojalla

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \;\geq\; \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbf{Z}_+.$$

$\square$

Esimerkki 4.26. Funktio $f\colon [2, 7] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$$

on selvästi jatkuva suljetulla välillä $[2, 7]$, joten se on tasaisesti jatkuva välillä $[2, 7]$ (ja samalla jokaisella tämän välin osavälillä).

Lause 4.34. *Avoimella välillä $]a, b[$ tasaisesti jatkuva funktio on tällä välillä rajoitettu.*

Todistus. Olkoon funktio f tasaisesti jatkuva välillä $]a, b[$. Tällöin on olemassa sellainen $\delta_1 > 0$, että

$$|f(x_1) - f(x_2)| < 1 \text{ aina, kun } x_1, x_2 \in \,]a, b[\, \text{ ja } |x_1 - x_2| < \delta_1.$$

Käyttämällä kolmioepäyhtälöä saadaan

$$|f(x_1)| \;=\; |f(x_2) + f(x_1) - f(x_2)| \;\leq\; |f(x_2)| + |f(x_1) - f(x_2)|\,,$$

joten

$$|f(x_1)| \;<\; |f(x_2)| + 1 \tag{4.6}$$

aina, kun $x_1, x_2 \in \,]a, b[\,$ ja $|x_1 - x_2| < \delta_1$.

Merkitään $\delta = \min\{\delta_1, \frac{b-a}{3}\}$, ja jaetaan väli $]a, b[$ kolmeen osaan

$$]a, b[\;=\;]a, a+\delta[\;\cup\; [a+\delta, b-\delta] \;\cup\;]b-\delta, b[\,.$$

1°: Jos $x \in \,]a, a+\delta[$, niin $|x - (a+\delta)| < \delta \leq \delta_1$. Täten ehdon (4.6) nojalla

$$|f(x)| \;<\; |f(a+\delta)| + 1.$$

2°: Jos $x \in \,]b-\delta, b[$, niin $|x-(b-\delta)| < \delta \leq \delta_1$. Täten ehdon (4.6) nojalla

$$|f(x)| \ < \ |f(b-\delta)| + 1.$$

3°: Suljetulla välillä jatkuvana funktiona f on lisäksi rajoitettu välillä $[a+\delta, b-\delta]$ (lause 4.25, s. 103), joten on olemassa sellainen $M > 0$, että

$$|f(x)| \ \leq \ M \qquad \forall x \in [a+\delta, b-\delta]\,.$$

Merkitään nyt

$$M' \ = \ \max\{\,|f(a+\delta)|+1,\ |f(b-\delta)|+1, M\}.$$

Tällöin kohtien 1°–3° nojalla

$$|f(x)| \ \leq \ M' \qquad \forall x \in \,]a, b[\,,$$

joten f on välillä $]a, b[$ rajoitettu.

$\square$

Esimerkki 4.27. Esimerkin 3.25 (s. 84) nojalla

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-2x}{(1-x)^2} = -\infty,$$

joten funktio $f\colon\ ]0,1[\, \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{1-2x}{(1-x)^2}$$

ei ole rajoitettu välillä $]0,1[$. Siis lauseen 4.34 nojalla f ei ole myöskään tasaisesti jatkuva välillä $]0,1[$.

Huomautus 4.35. Avoimella välillä $]a, b[$ jatkuva ja rajoitettu funktio ei välttämättä ole tasaisesti jatkuva tällä välillä.

5 Funktion derivaatta

5.1 Määritelmiä ja perusominaisuuksia

Määritelmä 5.1. Funktio f on *derivoituva* pisteessä x, jos raja-arvo

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

on äärellisenä olemassa. Kyseistä raja-arvoa sanotaan tällöin funktion f *derivaataksi* pisteessä x ja merkitään $f'(x)$.

Huomautus. Derivaatan määritelmä tässä muodossa esitettynä sisältää oletuksen, että f on määritelty pisteen x jossakin ympäristössä (piste x mukaan luettuna).

Huomautus. Muita mahdollisia derivaatan merkitsemistapoja ovat esimerkiksi

$$\frac{d}{dx}f(x), \quad Df(x), \quad D_x f(x).$$

Huomautus. Osamäärää

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

sanotaan funktion f *erotusosamääräksi* pisteessä x.

Huomautus 5.1. Derivaatan määritelmässä esiintyvä raja-arvo voidaan esittää myös muodossa

$$\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Esimerkki 5.1. Olkoon

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad (x\neq 0).$$

Tällöin $f'(1)=f'(-1)=-1$, sillä jos $0<|h|<1$, niin

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\frac{1}{1+h}-1}{h}=\frac{\frac{-h}{1+h}}{h}=-\frac{1}{1+h}\to -1,\ \text{kun } h\to 0,$$

ja

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{\frac{1}{-1+h}-(-1)}{h}=\frac{\frac{h}{-1+h}}{h}=\frac{1}{-1+h}\to -1,\ \text{kun } h\to 0.$$

Esimerkki 5.2. Funktio $f(x) = |x|$ ei ole derivoituva pisteessä $x = 0$, sillä jos $h \neq 0$, niin

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & \text{jos } h > 0, \\ -1, & \text{jos } h < 0, \end{cases}$$

joten raja-arvo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

ei ole olemassa.

Esimerkki 5.3. Olkoon $f(x) = c$ ($c \in \mathbf{R}$). Tällöin $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, sillä jos $h \neq 0$, niin

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Vakiofunktion derivaatta on siis aina nolla.

Esimerkki 5.4. Olkoon $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbf{Z}_+$). Osoitetaan, että

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$. Koska

$$y^n - x^n = (y-x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1})$$

kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$ ja kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$ (harjoitustehtävä), niin huomautuksen 5.1 ja esimerkin 3.11 (s. 70) nojalla

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \\ &= \lim_{y\to x} \frac{y^n - x^n}{y-x} \\ &= \lim_{y\to x} (y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}) \\ &= x^{n-1} + x^{n-2}x + \cdots + xx^{n-2} + x^{n-1} \\ &= n \cdot x^{n-1}. \end{aligned}$$

Esimerkki 5.5. Osoitetaan, että

$$D(\sin x) \;=\; \cos x \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Palautetaan taas (vrt. esimerkki 3.9, s. 64) trigonometriasta mieleen kaava

$$\sin x - \sin y \;=\; 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}. \tag{5.1}$$

Käyttämällä kaavaa (5.1) sekä kosinin raja-arvoa (esimerkki 3.9, s. 64) ja esimerkin 3.14 (s. 71) raja-arvoa

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

saadaan

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}}_{\to 1}\cos(\underbrace{x+\frac{h}{2}}_{\to x}) \\
&= 1\cdot\cos x \\
&= \cos x.
\end{aligned}$$

Käyttämällä kaavan (5.1) sijasta kaavaa

$$\cos x - \cos y \;=\; -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

voidaan vastaavalla tavalla osoittaa (harjoitustehtävä), että

$$D(\cos x) \;=\; -\sin x \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Esimerkki 5.6. Olkoon $f(x) = \cos x$. Tällöin

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{\cos(0+x)-\cos 0}{x} \;=\; f'(0) \;=\; -\sin 0 \;=\; 0.$$

Määritelmä 5.2. Mikäli raja-arvo

$$f'(x+) \;=\; \lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

on äärellisenä olemassa, sanotaan sitä funktion f *oikeanpuoleiseksi derivaataksi* pisteessä x. Vastaavasti mikäli raja-arvo

$$f'(x-) \;=\; \lim_{h\to 0-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

on äärellisenä olemassa, sanotaan sitä funktion f *vasemmanpuoleiseksi derivaataksi* pisteessä x.

Esimerkki 5.7. Olkoon $f(x) = x^q$, missä $x \geq 0$ ja $q \in \mathbf{Q}_+$ (ks. esimerkki 4.23, s. 109). Jos $h \to 0+$, niin

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{(0+h)^q - 0^q}{h} = \frac{h^q}{h} = h^{q-1} \to \begin{cases} 0, & \text{kun } q > 1, \\ 1, & \text{kun } q = 1, \\ \infty, & \text{kun } 0 < q < 1. \end{cases}$$

Täten $f'(0+) = 0$, kun $q > 1$, $f'(0+) = 1$, kun $q = 1$, ja $f'(0+)$ ei ole olemassa, kun $0 < q < 1$.

Esimerkki 5.8. Funktiolle $f(x) = |x|$ (ks. esimerkki 5.2)

$$f'(0+) = 1 \qquad \text{ja} \qquad f'(0-) = -1.$$

Huomautus 5.2. Lauseen 3.19 (s. 78) nojalla funktio f on derivoituva pisteessä x täsmälleen silloin, kun $f'(x-)$ ja $f'(x+)$ ovat äärellisenä olemassa ja yhtä suuret.

Määritelmä 5.3. Funktio f on *derivoituva avoimella välillä* $]a, b[$, jos f on derivoituva välin jokaisessa pisteessä.

Määritelmä 5.4. Funktio f on *derivoituva suljetulla välillä* $[a, b]$, jos f on derivoituva välin jokaisessa sisäpisteessä ja lisäksi $f'(a+)$ ja $f'(b-)$ ovat äärellisenä olemassa.

Määritelmä 5.5. Funktio f on derivoituva välillä $[a, b[$, jos f on derivoituva välillä $]a, b[$ ja $f'(a+)$ on äärellisenä olemassa, ja f on derivoituva välillä $]a, b]$, jos f on derivoituva välillä $]a, b[$ ja $f'(b-)$ on äärellisenä olemassa.

Huomautus. Jos f on derivoituva välillä I, sanotaan kuvausta $f' \colon I \to \mathbf{R}$ (jonka saamat arvot välillä I ovat derivaatat $f'(x)$) funktion f *derivaattafunktioksi* (tai lyhyesti *derivaataksi*) välillä I.

Huomautus. Jos derivaattafunktio f' on jatkuva välillä I, sanotaan, että funktio f on *jatkuvasti derivoituva* välillä I.

Huomautus. Derivaatta $f'(x)$ ja derivaattafunktion (eli derivaatan) raja-arvo

$$\lim_{y \to x} f'(y)$$

ovat kaksi eri käsitettä (ks. esimerkki 5.9).

Esimerkki 5.9. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{jos } x \geq 1, \\ 2, & \text{jos } x < 1. \end{cases}$$

Funktio f ei ole derivoituva pisteessä $x = 1$, sillä

$$f'(1-) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

ei ole äärellisenä olemassa (harjoitustehtävä). Sen sijaan

$$\lim_{x \to 1-} f'(x) = \lim_{x \to 1+} f'(x) = \lim_{x \to 1} f'(x) = 0,$$

sillä $f'(x) = 0$ kaikilla $x \neq 1$.

Lause 5.3. *Jos funktio f on derivoituva pisteessä x, niin f on jatkuva pisteessä x.*

Todistus. Jos f on derivoituva pisteessä x, niin

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Olkoon $h \neq 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} f(x+h) &= h \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \\ &\to 0 \cdot f'(x) + f(x) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

kun $h \to 0$. Siis f on jatkuva pisteessä x (huomautus 4.3, s. 90). $\square$

Huomautus. Jos funktio f ei ole jatkuva pisteessä x, niin f ei ole myöskään derivoituva pisteessä x.

Huomautus. Jos funktio on derivoituva jollakin välillä I, on se tällä välillä myös jatkuva (harjoitustehtävä).

Huomautus. Lause 5.3 ei ole kääntäen voimassa. Esimerkiksi $f(x) = |x|$ on jatkuva pisteessä $x = 0$, mutta ei ole derivoituva pisteessä $x = 0$ (ks. esimerkki 5.2, s. 115).

Lause 5.4. *Olkoot funktiot f ja g derivoituvia pisteessä x. Tällöin myös funktiot*

$$f+g,\quad f-g,\quad fg,\quad kf\ (k\in\mathbf{R})\ \text{ ja }\ \frac{f}{g}\ (\text{kun } g(x)\neq 0)$$

ovat derivoituvia pisteessä x ja

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} & (f+g)' &= f'+g',\\
&\text{(ii)} & (f-g)' &= f'-g',\\
&\text{(iii)} & (kf)' &= k\cdot f',\\
&\text{(iv)} & (fg)' &= f'g+g'f,\\
&\text{(v)} & \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g-g'f}{g^2}.
\end{aligned}
$$

Todistus. (i) Laskemalla saadaan

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h}\\
&= f'(x)+g'(x).
\end{aligned}
$$

(ii) Tulos seuraa kohdista (i) ja (iii), kun funktioksi g valitaan $-g$.

(iii) Koska vakiofunktion derivaatta on nolla, tulos saadaan kohdasta (iv) valitsemalla funktioksi g vakiofunktio k.

(iv) Laskemalla saadaan

$$
\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,[g(x+h)-g(x)]+g(x)\,[f(x+h)-f(x)]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\underbrace{f(x+h)}_{\to f(x)}\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]\\
&= f(x)g'(x)+g(x)f'(x).
\end{aligned}
$$

(v) Osoitetaan, että

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2} \qquad (g \neq 0).$$

Tällöin väite seuraa kohdasta (iv), sillä

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + \frac{-g'}{g^2} \cdot f = \frac{f'g - g'f}{g^2} \qquad (g \neq 0).$$

Laskemalla saadaan

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0} -\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \frac{1}{\underbrace{g(x+h)}_{\to g(x)} g(x)} \\
&= -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \quad (g(x) \neq 0).
\end{aligned}$$

□

Esimerkki 5.10. Lauseen 5.4 sekä esimerkkien 5.3 (s. 115) ja 5.4 (s. 115) perusteella polynomifunktio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

on derivoituva kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

Esimerkki 5.11. Käyttämällä tulon derivointisääntöä sekä polynomin (esimerkki 5.10) ja sinin (esimerkki 5.5, s. 116) derivointikaavoja saadaan

$$D(x^5 \sin x) = 5x^4 \sin x + x^5 \cos x \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Esimerkki 5.12. Jos $x \neq 0$, niin käyttämällä polynomin derivointikaavaa ja osamäärän derivointisääntöä saadaan

$$D\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

ja

$$D\left(\frac{x-1}{x^2}\right) = \frac{1 \cdot x^2 - 2x(x-1)}{(x^2)^2} = \frac{-x^2 + 2x}{x^4} = \frac{2-x}{x^3}.$$

Esimerkki 5.13. Osoitetaan, että

$$D(\tan x) \;=\; \frac{1}{\cos^2 x} \;=\; 1+\tan^2 x$$

kaikilla $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ $(n \in \mathbf{Z})$ ja

$$D(\cot x) \;=\; -\frac{1}{\sin^2 x} \;=\; -1-\cot^2 x$$

kaikilla $x \neq n\pi$ $(n \in \mathbf{Z})$.

Koska

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin sinin ja kosinin derivointikaavojen (esimerkki 5.5, s. 116) sekä osamäärän derivoimissäännön avulla saadaan

$$\begin{aligned} D(\tan x) &= D\Big(\frac{\sin x}{\cos x}\Big) \\ &= \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \;=\; 1+\tan^2 x \end{aligned}$$

kaikilla $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ $(n \in \mathbf{Z})$ ja

$$\begin{aligned} D(\cot x) &= D\Big(\frac{\cos x}{\sin x}\Big) \\ &= \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{1}{\sin^2 x} \;=\; -1-\cot^2 x \end{aligned}$$

kaikilla $x \neq n\pi$ $(n \in \mathbf{Z})$.

Määritelmä 5.6. Jos funktion f derivaattafunktio f' on derivoituva pisteessä x, sanotaan funktion f' derivaattaa tässä pisteessä funktion f *toisen kertaluvun derivaataksi* pisteessä x ja merkitään $f''(x)$. Yleisesti funktion f *n:nnen kertaluvun derivaatta* pisteessä x on

$$f^{(n)}(x) \;=\; D\Big(f^{(n-1)}(x)\Big) \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

mikäli derivaatat ovat olemassa.

Huomautus. Funktion $f(x)$ n:nnen kertaluvun derivaatalle käytetään myös merkintöjä

$$D^n f(x) \qquad \text{ja} \qquad \frac{d^n}{dx^n} f(x).$$

Huomautus. Lisäksi voidaan määritellä, että $f^{(0)} = f$, jolloin määritelmä 5.6 on merkinnän luonteisena voimassa myös, kun $n = 1$.

Esimerkki 5.14. Olkoon $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbf{Z}_+$). Tällöin polynomin derivointikaavan (esimerkki 5.10) perusteella

$$\begin{aligned} f'(x) &= nx^{n-1}, \\ f''(x) &= n \cdot (n-1)x^{n-2}, \\ &\vdots \\ f^{(n-1)}(x) &= n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot x, \\ f^{(n)}(x) &= n!, \\ f^{(n+1)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 5.15. Olkoon $f(x) = \sin x$. Tällöin sinin ja kosinin derivointikaavojen (esimerkki 5.5, s. 116) sekä lauseen 5.4 (s. 119) perusteella

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x, \\ f''(x) &= -\sin x, \\ f'''(x) &= -\cos x, \\ f^{(4)}(x) &= \sin x, \\ &\vdots \end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

5.2 Yhdistetyn funktion ja käänteisfunktion derivaatta

Tarkastellaan seuraavaksi yhdistetyn funktion derivointikaavaa eli *ketjusääntöä*. Lauseessa 5.5 oletetaan tietenkin, että funktion f kuvajoukko sisältyy funktion g määrittelyjoukkoon, jolloin voidaan puhua yhdistetystä funktiosta $g \circ f$.

Lause 5.5. *Jos funktio f on derivoituva pisteessä x ja funktio g on derivoituva pisteessä $f(x)$, niin funktio $g \circ f$ on derivoituva pisteessä x ja*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Todistus. Olkoon f derivoituva pisteessä x ja g derivoituva pisteessä $f(x)$. Tavoitteena on nyt osoittaa, että

$$\lim_{h \to 0} \frac{(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = g'(f(x))f'(x).$$

Olkoon $h \neq 0$. Merkitään

$$y = f(x) \qquad \text{ja} \qquad k = f(x+h) - f(x).$$

Koska f on derivoituvana funktiona jatkuva pisteessä $x = 0$, niin $k \to 0$, jos $h \to 0$. Lisäksi

$$f(x+h) = f(x) + k = y + k$$

ja edelleen

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{g(y+k) - g(y)}{h}. \tag{5.2}$$

Olkoon

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{g(y+t) - g(y)}{t} - g'(y), & \text{kun } t \neq 0, \\ 0, & \text{kun } t = 0. \end{cases}$$

Koska g on derivoituva pisteessä y, niin $u(t)$ on jatkuva pisteessä $t = 0$. Lisäksi

$$g(y+t) - g(y) = t\,(u(t) + g'(y)) \qquad \forall\, t \in \mathbf{R},$$

joten myös

$$\frac{g(y+k) - g(y)}{h} = \frac{k\,(u(k) + g'(y))}{h} = (u(k) + g'(y)) \cdot \frac{k}{h} \qquad \forall\, k \in \mathbf{R}.$$

Jos nyt $h \to 0$, niin $u(k) \to 0$ (sillä myös $k \to 0$ ja u on jatkuva pisteessä $k = 0$) ja

$$\frac{k}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to f'(x).$$

Täten

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{h} = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x),$$

mistä väite seuraan yhtälön (5.2) perusteella. □

Huomautus. Lauseen 5.5 tulos voidaan esittää myös muodossa

$$(g \circ f)'(x) \; = \; \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}.$$

Vastaavasti jos $f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n$ on yhdistetty funktio ja alla esiintyvät derivaatat ovat olemassa, niin voidaan yleistää

$$\frac{d}{dx}(f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n) \; = \; \frac{df_1}{df_2} \cdot \frac{df_2}{df_3} \cdot \cdots \cdot \frac{df_n}{dx}.$$

Esimerkki 5.16. Käyttämällä polynomin ja sinin derivointikaavoja sekä yhdistetyn funktion derivoimissääntöä saadaan[1]

$$\begin{aligned} D(\sin^2 2x) &= 2 \cdot \sin 2x \cdot D(\sin 2x) \\ &= 2 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot D(2x) \\ &= 2 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 \\ &= 4 \sin 2x \cdot \cos 2x \\ &= 2 \sin 4x \end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 5.17. Vastaavasti kuin esimerkissä 5.16 saadaan

$$\begin{aligned} D\Big(\sin(\sin x^2)\Big) &= \cos(\sin x^2) \cdot D(\sin x^2) \\ &= \cos(\sin x^2) \cdot \cos x^2 \cdot D(x^2) \\ &= \cos(\sin x^2) \cdot \cos x^2 \cdot 2x \\ &= 2x \cos x^2 \cdot \cos(\sin x^2) \end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 5.18. Käyttämällä polynomin derivointikaavaa ja yhdistetyn funktion derivoimissääntöä saadaan

$$D\Big((x^3 + 2x)^5\Big) \; = \; 5(x^3 + 2x)^4 \cdot (3x^2 + 2) \; = \; (15x^2 + 10)(x^3 + 2x)^4$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

[1] Yhtälöketjun viimeinen yhtäsuuruus seuraa trigonometrian kaavasta $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

Esimerkki 5.19. Esimerkin 5.4 (s. 115) perusteella

$$D(x^n) = nx^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+ \text{ ja } \forall x \in \mathbf{R}.$$

Osoitetaan, että jos $x \neq 0$, niin potenssin derivointikaava pätee kaikille $n \in \mathbf{Z}$.

Olkoon siis $x \neq 0$. Todetaan aluksi, että tällöin

$$D(x^0) = D(1) = 0 = 0 \cdot x^{0-1}.$$

Olkoon sitten $n \in \mathbf{Z}_+$. Käyttämällä kaavaa (ks. s. 15)

$$x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

ja soveltamalla yhdistetyn funktion derivointisääntöä sekä potenssin derivointikaavaa ja esimerkin 5.12 (s. 120) tulosta

$$D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

saadaan

$$\begin{aligned}
D(x^{-n}) &= D\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right) \\
&= n\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} \cdot D\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= n\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= -n\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^2 \\
&= -n\left(\frac{1}{x}\right)^{n+1} \\
&= -nx^{-(n+1)} \\
&= -nx^{-n-1}.
\end{aligned}$$

Siis potenssin derivointikaava pätee kaikille $n \in \mathbf{Z}$ (kun $x \neq 0$) eli

$$D(x^n) = nx^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbf{Z} \ \ (x \neq 0).$$

Esimerkki 5.20. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Osoitetaan, että $f'(x)$ on olemassa kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja derivaattafunktio $f'(x)$ ei ole jatkuva pisteessä $x = 0$.

1°: Olkoon $x \neq 0$. Tällöin

$$f'(x) \;=\; 2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \;=\; 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

tavanomaisten derivointisääntöjen nojalla.

2°: Funktio $f(x)$ on derivoituva pisteessä $x = 0$ ja $f'(0) = 0$, sillä esimerkin 3.7 (s. 64) nojalla

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \;=\; \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin(1/h) - 0}{h} \;=\; \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} \;=\; 0.$$

Siis kohtien 1° ja 2° nojalla funktio $f(x)$ on derivoituva kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

3°: Osoitetaan derivaattafunktion $f'(x)$ epäjatkuvuus pisteessä $x = 0$ osoittamalla, että raja-arvo $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ ei ole olemassa. Esimerkin 3.7 (s. 64) nojalla

$$\lim_{x \to 0} 2x \sin \frac{1}{x} \;=\; 0.$$

Toisaalta raja-arvo

$$\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$$

ei ole olemassa (harjoitustehtävä, vrt. esimerkki 3.10, s. 66), joten myöskään raja-arvo

$$\lim_{x \to 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) \;=\; \lim_{x \to 0} f'(x)$$

ei voi olla olemassa (lause 3.14, s. 70). Siis $f'(x)$ ei ole jatkuva pisteessä $x = 0$.

Huomautus. Koska esimerkin 5.20 derivaattafunktio $f'(x)$ ei ole jatkuva pisteessä $x = 0$, niin $f'(x)$ ei ole myöskään derivoituva pisteessä $x = 0$ (eli $f''(0)$ ei ole olemassa).

Lause 5.6. *Oletetaan, että funktio f on jatkuva ja aidosti monotoninen jossakin pisteen x ympäristössä ja että f on derivoituva pisteessä x ja $f'(x) \neq 0$. Tällöin käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva pisteessä $y = f(x)$ ja*

$$(f^{-1})'(y) \;=\; \frac{1}{f'(x)} \;=\; \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Todistus. Oletetaan, että lauseen oletukset ovat voimassa pisteessä x_0. Olkoon lisäksi $y = f(x)$ ja erityisesti $y_0 = f(x_0)$. Koska f on jatkuva ja aidosti monotoninen jossakin pisteen x_0 ympäristössä, on funktiolla f rajoitettuna tähän väliin käänteisfunktio f^{-1} (joka on jatkuva ja aidosti monotoninen jossakin pisteen y_0 ympäristössä, lauseet 4.29 ja 4.30 sekä huomautus 4.31, s. 107–108). Lisäksi tällöin $x \to x_0$ täsmälleen silloin, kun $f(x) \to f(x_0)$ eli $y \to y_0$, ja $f(x) \neq f(x_0)$, kun $x \neq x_0$. Siis

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h} \;&=\; \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \\
&=\; \lim_{x\to x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \\
&=\; \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \\
&=\; \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \\
&=\; \frac{1}{f'(x_0)},
\end{aligned}$$

sillä f on derivoituva pisteessä x_0 ja $f'(x_0) \neq 0$. Täten f^{-1} on derivoituva pisteessä y_0 ja

$$(f^{-1})'(y_0) \;=\; \frac{1}{f'(x_0)} \;=\; \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

□

Esimerkki 5.21. Osoitetaan, että jos $x > 0$, niin potenssin derivointikaava

$$D(x^q) \;=\; qx^{q-1}$$

pätee kaikille $q \in \mathbf{Q}$. Olkoon siis $f\colon\ ]0,\infty[\ \to\ ]0,\infty[$,

$$f(x) \;=\; x^n \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

Esimerkissä 4.23 (s. 109) osoitettiin, että funktio f on jatkuva ja aidosti kasvava välillä $]0,\infty[$ ja että sillä on jatkuva ja aidosti kasvava käänteisfunktio

$$f^{-1}\colon\ ]0,\infty[\ \to\ ]0,\infty[\,,$$

jota merkittiin

$$\sqrt[n]{x} \qquad \text{tai} \qquad x^{\frac{1}{n}}.$$

Lisäksi (esimerkki 5.4, s. 115)

$$f'(x) \;=\; nx^{n-1} \;\neq\; 0 \qquad \forall x \in\ ]0,\infty[\,,$$

joten käänteisfunktio f^{-1} on lauseen 5.6 nojalla derivoituva kaikilla $x \in\ ]0,\infty[$. Jos

$$y = x^n \qquad \text{eli} \qquad x = y^{\frac{1}{n}},$$

niin

$$D\Big(y^{\frac{1}{n}}\Big) \;=\; \frac{1}{D(x^n)} \;=\; \frac{1}{nx^{n-1}} \;=\; \frac{1}{n\Big(y^{\frac{1}{n}}\Big)^{n-1}} \;=\; \frac{1}{ny^{\frac{n-1}{n}}} \;=\; \frac{1}{n}\,y^{-\frac{n-1}{n}} \;=\; \frac{1}{n}\,y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Yleensä myös käänteisfunktion derivaatta esitetään käyttäen muuttujaa x. Täten

$$D\Big(x^{\frac{1}{n}}\Big) \;=\; \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1} \qquad (x > 0).$$

Jos nyt $m \in \mathbf{Z}$, niin soveltamalla potenssin derivointikaavaa (kokonaisluvuille, ks. esimerkki 5.19, s. 125) ja yhdistetyn funktion derivointisääntöä saadaan (vrt. esimerkki 4.23, s. 109)

$$\begin{aligned}
D\Big(x^{\frac{m}{n}}\Big) &= D\Big(\Big(x^{\frac{1}{n}}\Big)^m\Big) \\
&= m \cdot \Big(x^{\frac{1}{n}}\Big)^{m-1} \cdot D\Big(x^{\frac{1}{n}}\Big) \\
&= m \cdot \Big(x^{\frac{1}{n}}\Big)^{m-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \\
&= \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \\
&= \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1} \qquad (m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{Z}_+,\ x > 0).
\end{aligned}$$

Jos siis $x > 0$, niin

$$D(x^q) \;=\; qx^{q-1} \qquad \forall q \in \mathbf{Q}.$$

Huomautus 5.7. Esimerkkien 5.7 (s. 117) ja 5.21 nojalla funktio x^q ($q \in \mathbf{Q}_+$) on derivoituva välillä $[0,\infty[$, jos $q \geq 1$.

Huomautus. Oletus $f'(x) \neq 0$ lauseessa 5.6 on oleellinen. Esimerkiksi funktio $f(x) = x^3$ on jatkuva, aidosti kasvava ja derivoituva kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Lisäksi sillä on käänteiskuvaus, joka on jatkuva ja aidosti kasvava kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Käänteiskuvaus ei kuitenkaan ole derivoituva pisteessä $x = 0$ (harjoitustehtävä).

5.3 Rollen lause ja väliarvolause

Funktion ominaisuuksia on usein helppo tutkia käyttämällä funktion derivaattaa (jos funktio on derivoituva). Tutkitaan aluksi ennen Rollen lausetta ja väliarvolausetta funktion käyttäytymistä yksittäisessä pisteessä.

Lause 5.8. *Oletetaan, että funktio f on derivoituva pisteessä a.*

(i) *Jos $f'(a) > 0$, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että*

$$f(x) < f(a) \quad \forall x \in \,]a-\delta, a[\qquad \text{ja} \qquad f(x) > f(a) \quad \forall x \in \,]a, a+\delta[\,.$$

(ii) *Jos $f'(a) < 0$, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että*

$$f(x) > f(a) \quad \forall x \in \,]a-\delta, a[\qquad \text{ja} \qquad f(x) < f(a) \quad \forall x \in \,]a, a+\delta[\,.$$

Todistus. Todistetaan kohta (i). Kohta (ii) todistetaan vastaavasti (harjoitustehtävä). Koska

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \;=\; f'(a) \;>\; 0,$$

niin lauseen 3.11 (s. 67) on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \;>\; 0 \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_\delta(a).$$

Jos nyt $x \in \,]a-\delta, a[$, niin $x - a < 0$, joten myös

$$f(x) - f(a) < 0 \qquad \text{eli} \qquad f(x) < f(a).$$

Jos taas $x \in \,]a, a+\delta[$, niin $x - a > 0$, joten myös

$$f(x) - f(a) > 0 \qquad \text{eli} \qquad f(x) > f(a).$$

□

Huomautus. Ehdosta $f'(a) > 0$ ei voi päätellä, että funktio f olisi kasvava millään välillä $]a-\delta, a+\delta[$, ja ehdosta $f'(a) < 0$ ei voi päätellä, että funktio f olisi vähenevä millään välillä $]a-\delta, a+\delta[$.

Seuraus 5.9. *Jos funktio f saavuttaa suurimman tai pienimmän arvonsa pisteessä a ja f on derivoituva pisteessä a, niin $f'(a) = 0$.*

Huomautus. Seuraus 5.9 ei ole voimassa kääntäen.

Lause 5.10 (Rollen lause)**.** *Jos*

(i) f *on jatkuva suljetulla välillä* $[a, b]$,

(ii) f *on derivoituva avoimella välillä* $]a, b[$,

(iii) $f(a) = f(b)$,

niin on olemassa sellainen $\xi \in\,]a, b[$, *että* $f'(\xi) = 0$.

Todistus. 1°: Jos f on vakiofunktio, niin

$$f'(x) = 0 \qquad \forall x \in\,]a, b[\,.$$

Täten mikä tahansa välin $]a, b[$ piste kelpaa vaadituksi pisteeksi.

2°: Jos f ei ole vakiofunktio, niin on olemassa sellainen $c \in\,]a, b[$, että

$$f(c) > f(a) \quad \text{tai} \quad f(c) < f(a).$$

Oletetaan nyt, että

$$f(c) > f(a) = f(b)$$

(tapaus $f(c) < f(a)$ todistetaan täysin vastaavasti). Koska f on suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuva, niin f saavuttaa suurimman arvonsa jossakin välin $[a, b]$ pisteessä ξ (lause 4.26, s. 104). Tällöin

$$f(\xi) \;\geq\; f(c) \;>\; f(a) \;=\; f(b),$$

joten $\xi \in\,]a, b[$. Siis f on derivoituva pisteessä ξ. Lisäksi seurauksen 5.9 nojalla

$$f'(\xi) = 0.$$

Siis ξ on vaadittu piste. □

Seuraus 5.11. *Jos* f *on derivoituva välillä* I *ja on olemassa sellaiset* $x_1, x_2 \in I$, *että*

$$x_1 < x_2 \qquad \text{ja} \qquad f(x_1) = f(x_2),$$

niin on olemassa sellainen $\xi \in\,]x_1, x_2[$, *että* $f'(\xi) = 0$.

Huomautus 5.12. Seurauksen 5.11 nojalla välillä I derivoituvalla funktiolla on tällä välillä aina kahden nollakohtansa välissä vähintään yksi derivaatan nollakohta.

Esimerkki 5.22. Olkoon

$$f(x) = x^3 + 3x.$$

Tällöin

$$f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1) > 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

joten derivaattafunktiolla f' ei ole yhtään reaalista nollakohtaa. Siis huomautuksen 5.12 nojalla funktiolla f voi olla korkeintaan yksi reaalinen nollakohta.

Toisaalta selvästi $f(0) = 0$, joten funktiolla f on täsmälleen yksi reaalinen nollakohta (pisteessä $x = 0$).

Huomautus 5.13. Käyttämällä huomautusta 5.12 ja Bolzanon lausetta (s. 101) saadaan joskus määritettyä funktion nollakohtien täsmällinen määrä.

Esimerkki 5.23. Funktiolla

$$f(x) = x^4 + 4x^2 - 7x - 5$$

on täsmälleen kaksi reaalista nollakohtaa (harjoitustehtävä).

Lause 5.14 (Differentiaalilaskennan väliarvolause)**.** *Jos funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a, b[$, niin on olemassa sellainen $\xi \in \,]a, b[$, että*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Todistus. Olkoon

$$h(x) = x\,[f(b) - f(a)] - f(x)(b - a).$$

Selvästi h on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä $]a, b[$. Lisäksi

$$h(a) = h(b) = af(b) - bf(a).$$

Täten Rollen lausetta voidaan soveltaa funktioon h välillä $[a, b]$, joten on olemassa sellainen $\xi \in \,]a, b[$, että

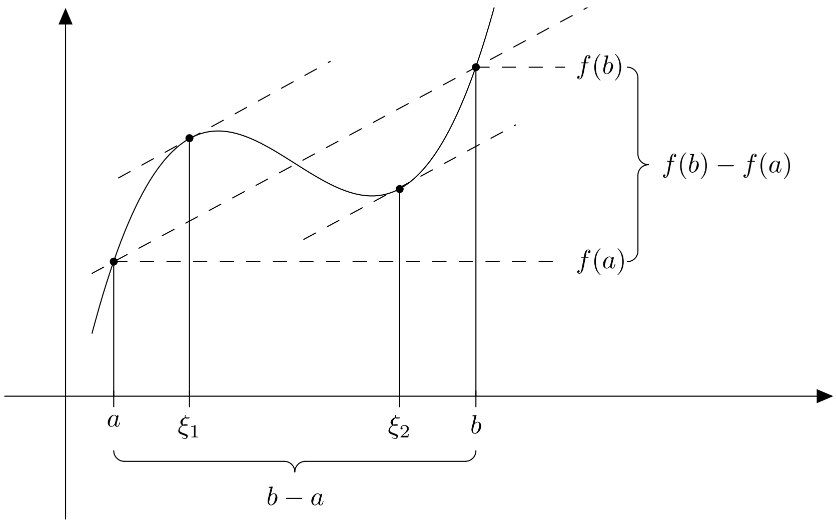
$$h'(\xi) = [f(b) - f(a)] - f'(\xi)(b - a) = 0.$$

Siis

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

□

Huomautus. Lauseesta 5.14 käytetään usein lyhyesti pelkästään nimitystä väliarvolause. Siitä käytetään myös lyhennettä VAL.



Kuva 5.1: Funktion f kuvaajan pisteisiin $(\xi_1, f(\xi_1))$ ja $(\xi_2, f(\xi_2))$ piirretyt tangentit ovat pisteiden $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ kautta kulkevan suoran suuntaisia, joten tangenteilla ja kyseisellä suoralla on sama kulmakerroin.

Huomautus. Väliarvolauseen tulos voidaan esittää myös muodossa (vrt. kuva 5.1)

$$f'(\xi) \; = \; \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Huomautus. Piste ξ riippuu paitsi funktiosta f myös välistä $[a, b]$ (vrt. kuva 5.1 ja esimerkki 5.24).

Esimerkki 5.24. Olkoon

$$f(x) = x^3.$$

Tarkastellaan väliä $[0, b]$, missä $b > 0$, ja määritetään väliarvolauseessa esiintyvä piste ξ.

Funktio f on polynomina jatkuva ja derivoituva välillä $[0, b]$, joten väliarvolauseen nojalla on olemassa sellainen $\xi \in \,]0, b[$, että

$$b^3 - 0 \; = \; 3\xi^2(b - 0).$$

Siis

$$\xi \; = \; \frac{b}{\sqrt{3}} \; \in \;]0, b[\,.$$

Siis ξ todellakin riippuu koko ajan välin päätepisteistä.

Esimerkki 5.25. Osoitetaan väliarvolauseen avulla, että

$$|\cos x - 1| \;\le\; |x| \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Tarkastellaan funktiota $f(t) = \cos t$. Esimerkin 5.5 (s. 116) nojalla f on jatkuva ja derivoituva kaikilla $t \in \mathbf{R}$ ja

$$f'(t) \;=\; -\sin t \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}.$$

1°: Olkoon $x > 0$. Sovelletaan väliarvolausetta funktioon f välillä $[0, x]$ (f on jatkuva ja derivoituva välillä $[0, x]$). On siis olemassa sellainen $\xi \in \,]0, x[$, että

$$\cos x - \cos 0 \;=\; -\sin \xi \cdot (x - 0).$$

Koska $\cos 0 = 1$ ja $|\sin \xi| \le 1$ kaikilla $\xi \in \mathbf{R}$, niin

$$|\cos x - 1| \;=\; |-\sin \xi \cdot x| \;=\; |\sin \xi| \cdot |x| \;\le\; |x|\,.$$

2°: Olkoon $x < 0$. Sovelletaan väliarvolausetta funktioon f välillä $[x, 0]$ (f on jatkuva ja derivoituva välillä $[x, 0]$). On siis olemassa sellainen $\xi \in \,]x, 0[$, että

$$\cos 0 - \cos x \;=\; -\sin \xi \cdot (0 - x)$$

eli

$$\cos x - \cos 0 \;=\; -\sin \xi \cdot (x - 0).$$

Väite seuraa nyt vastaavasti kuin kohdassa 1°.

Koska väite on tosi, kun $x = 0$, niin kohdista 1° ja 2° seuraa, että väite pätee kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 5.26. Osoitetaan väliarvolauseen avulla, että

$$\sqrt{x} \;<\; \frac{x+1}{2} \qquad \forall x > 1$$

ja

$$\sqrt{x} \;<\; \frac{x+1}{2}, \qquad \text{kun } 0 < x < 1.$$

Tarkastellaan funktiota

$$f(t) = \sqrt{t} \qquad (t \ge 0)$$

ja sovelletaan väliarvolausetta funktioon f väleillä $[1, x]$ sekä $[x, 1]$. Yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi.

Lause 5.15 (Integraalilaskennan peruslause)**.** *Jos $f' \equiv 0$ välillä I, niin f on vakio välillä I.*[1]

Todistus. Oletetaan, että $x, y \in I$ ja $x < y$. Koska f on derivoituva välillä I, on f myös jatkuva välillä I (ja siis myös välillä $[x, y]$). Siis väliarvolausetta voidaan soveltaa funktioon f välillä $[x, y]$. On siis olemassa sellainen $\xi \in \,]x, y[$, että

$$f(y) - f(x) \;=\; \overbrace{f'(\xi)}^{=0}(y - x) \;=\; 0.$$

Siis

$$f(y) \;=\; f(x).$$

Täten f on vakio kaikilla $x \in I$. □

Seuraus 5.16. *Jos*

$$f'(x) \;=\; g'(x) \qquad \forall x \in I,$$

niin on olemassa sellainen vakio $C \in \mathbf{R}$, että

$$f(x) \;=\; g(x) + C \qquad \forall x \in I.$$

Seuraus 5.17. *Jos*

$$f'(x) \;=\; g'(x) \qquad \forall x \in I$$

ja on olemassa sellainen $x \in I$, että $f(x) = g(x)$, niin

$$f(x) \;=\; g(x) \qquad \forall x \in I.$$

Esimerkki 5.27. Määritetään funktio f, kun tiedetään, että $f(0) = 1$ ja

$$f'(x) \;=\; x + 1 \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Koska

$$D\left(\frac{x^2}{2} + x\right) \;=\; x + 1,$$

niin seurauksen 5.16 perusteella on olemassa sellainen $C \in \mathbf{R}$, että

$$f(x) \;=\; \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Koska

$$f(0) \;=\; 0 + 0 + C \;=\; 1,$$

niin $C = 1$. Siis

$$f(x) \;=\; \frac{x^2}{2} + x + 1 \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

[1] Merkintä $f' \equiv 0$ välillä I tarkoittaa, että $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in I$.

Lause 5.18. *Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä I ja derivoituva välin I sisäpisteissä. Tällöin f on kasvava välillä I täsmälleen silloin, kun*

$$f'(x) \geq 0$$

välin I sisäpisteissä.

Todistus. "$\Rightarrow$": Oletetaan ensin, että f on kasvava välillä I. Olkoon x jokin välin I sisäpiste. Koska f on kasvava välillä I, niin

$$\begin{cases} f(x+h) \leq f(x), & \text{kun } h < 0 \text{ ja } x+h \in I, \\ f(x+h) \geq f(x), & \text{kun } h > 0 \text{ ja } x+h \in I. \end{cases}$$

Siis

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0, \quad \text{kun } h \neq 0 \text{ ja } x+h \in I.$$

Täten lauseen 3.8 (s. 66) perusteella (raja-arvo on olemassa, koska f on derivoituva pisteessä x)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0.$$

"$\Leftarrow$": Oletetaan toiseksi, että $f'(x) \geq 0$ aina, kun x on välin I sisäpiste. Olkoot x_1 ja x_2 sellaisia välin I pisteitä, että $x_1 < x_2$. Koska f on jatkuva välillä I ja derivoituva välin I sisäpisteissä, niin f on jatkuva välillä $[x_1, x_2]$ ja derivoituva välillä $]x_1, x_2[$. Täten väliarvolausetta voidaan soveltaa funktioon f välillä $[x_1, x_2]$. On siis olemassa sellainen $\xi \in \,]x_1, x_2[$, että

$$f(x_2) - f(x_1) = \overbrace{f'(\xi)}^{\geq 0} \overbrace{(x_2 - x_1)}^{>0} \geq 0.$$

Siis

$$f(x_1) \leq f(x_2),$$

joten f on kasvava välillä I. $\square$

Lause 5.19. *Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä I ja derivoituva välin I sisäpisteissä. Tällöin f on aidosti kasvava välillä I täsmälleen silloin, kun*

$$f'(x) \geq 0$$

välin I sisäpisteissä ja epäyhtälössä yhtäsuuruus ei ole voimassa millään välin I osavälillä (vaan korkeintaan yksittäisissä pisteissä).

Todistus. 1°: Oletetaan ensin, että funktio f on aidosti kasvava välillä I. Tällöin lauseen 5.18 nojalla

$$f'(x) \geq 0 \qquad \forall x \in I.$$

Jos nyt olisi olemassa sellainen $I_1 \subseteq I$, että

$$f'(x) = 0 \qquad \forall x \in I_1,$$

niin f olisi integraalilaskennan peruslauseen (lause 5.15, s. 135) nojalla vakio kaikilla $x \in I_1$. Siis f ei olisi aidosti kasvava, mikä on vastoin oletusta.

2°: Oletetaan toiseksi, että $f'(x) \geq 0$ aina, kun x on välin I sisäpiste, ja että yhtäsuuruus ei ole voimassa millään välin I osavälillä. Tällöin f on lauseen 5.18 nojalla kasvava välillä I.

Tehdään vastaoletus, että f ei ole aidosti kasvava. Tällöin on olemassa sellaiset pisteet $x_1, x_2 \in I$, että

$$x_1 < x_2 \qquad \text{ja} \qquad f(x_1) = f(x_2).$$

Kasvavana funktiona f on tällöin vakio välillä $[x_1, x_2]$, joten

$$f'(x) = 0 \qquad \forall x \in \,]x_1, x_2[\,,$$

mikä on vastoin oletusta. □

Lause 5.20. *Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä I ja derivoituva välin I sisäpisteissä. Tällöin f on vähenevä välillä I täsmälleen silloin, kun*

$$f'(x) \leq 0$$

välin I sisäpisteissä.

Todistus. Harjoitustehtävä.

Lause 5.21. *Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä I ja derivoituva välin I sisäpisteissä. Tällöin f on aidosti vähenevä välillä I täsmälleen silloin, kun*

$$f'(x) \leq 0$$

välin I sisäpisteissä ja epäyhtälössä yhtäsuuruus ei ole voimassa millään välin I osavälillä (vaan korkeintaan yksittäisissä pisteissä).

Todistus. Harjoitustehtävä.

Esimerkki 5.28. Olkoon
$$f(x) \;=\; x + \cos x.$$
Selvästi f on jatkuva ja derivoituva kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja
$$f'(x) \;=\; 1 - \sin x \;\geq\; 0.$$
Edelleen $f'(x) = 0$ vain, jos $x = \frac{\pi}{2} + n\,2\pi$ $(n \in \mathbf{Z})$. Siis $f(x)$ on aidosti kasvava koko joukossa $\mathbf{R}$.

Esimerkki 5.29. Olkoon
$$f(x) = x^n \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$
Tutkimalla funktion f derivaattaa saadaan seuraavat tulokset (harjoitustehtävä).

- Jos n on pariton, niin f on aidosti kasvava koko reaalilukujen joukossa.
- Jos n on parillinen, niin f on aidosti vähenevä välillä $]-\infty, 0]$ ja aidosti kasvava välillä $[0, \infty[$.

Esimerkki 5.30. Olkoon
$$f(x) = x^n \qquad (x \neq 0, n \in \mathbf{Z}_-).$$
Tutkimalla funktion f derivaattaa saadaan seuraavat tulokset (harjoitustehtävä).

- Jos n on pariton, niin f on aidosti vähenevä väleillä $]-\infty, 0[$ ja $]0, \infty[$.
- Jos n on parillinen, niin f on aidosti kasvava välillä $]-\infty, 0[$ ja aidosti vähenevä välillä $]0, \infty[$.

Esimerkki 5.31. Olkoon $I = \,]0, \infty[$ ja
$$f(x) = x^q \qquad (q \in \mathbf{Q}).$$
Tutkimalla funktion f derivaattaa saadaan seuraavat tulokset (harjoitustehtävä).

- Jos $q < 0$, niin f on aidosti vähenevä välillä I.
- Jos $q = 0$, niin f on sekä kasvava että vähenevä välillä I.
- Jos $q > 0$, niin f on aidosti kasvava välillä I (ja myös välillä $[0, \infty[$).

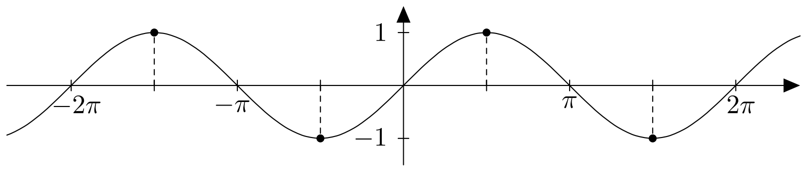
6 Transkendenttisia alkeisfunktioita

Tavallisimpia reaalimuuttujan funktioita kutsutaan alkeisfunktioiksi. Alkeisfunktioita ovat ensinnäkin *polynomit* eli funktiot, jotka saadaan muuttujasta ja vakioista yhteen- ja kertolaskun avulla. *Rationaalifunktiot* muodostetaan käyttämällä lausekkeita, joissa voi esiintyä yhteen- ja kertolaskun lisäksi myös jakolaskuja. Kun funktion lausekkeen muodostamisessa saa käyttää myös juurenottoja, funktio on *algebrallinen funktio*.

Algebrallisten funktioiden lisäksi alkeisfunktioita ovat *trigonometriset funktiot*, trigonometristen funktioiden käänteisfunktiot (*arkusfunktiot*), *eksponenttifunktiot*, *logaritmifunktiot* ja kaikki näistä yhdistämällä muodostetut funktiot. Näitä alkeisfunktioita kutsutaan *transkendenttisiksi alkeisfunktioiksi*.

6.1 Trigonometristen funktioiden käänteisfunktiot

Koska trigonometriset funktiot ovat jaksollisia, ne saavat saman arvon äärettömän monessa pisteessä. Funktiot eivät siis ole injektioita, joten niille ei voida koko reaalilukualueella määritellä käänteisfunktioita. Trigonometristen funktioiden käänteisfunktiot (*arkusfunktiot* eli *syklometriset funktiot*) onkin määriteltävä vain tietyille väleille rajoitettujen trigonometristen funktioiden käänteisfunktioina. Määrittelyssä yleisesti käytettyjen rajoittumien avulla saatuja käänteisfunktioita nimitetään usein arkusfunktioiden *päähaaroiksi*. Muita välejä käyttäen saatuja käänteisfunktioita kutsutaan vastaavasti *sivuhaaroiksi*.



Kuva 6.1: Funktion $\sin x$ kuvaaja origon ympäristössä.

6.1.1 Arkussini

Funktio

$$f(x) = \sin x$$

on jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R}$ (esimerkki 4.2, s. 90). Lisäksi lauseen 5.19 (s. 136) nojalla funktio on aidosti kasvava välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, sillä (esimerkki 5.5, s. 116)

$$f'(x) = \cos x \geq 0 \qquad \forall x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

ja yhtäsuuruus on voimassa vain, kun $x = -\frac{\pi}{2}$ ja $x = \frac{\pi}{2}$. Koska

$$\sin(-\tfrac{\pi}{2}) \;=\; -1 \qquad \text{ja} \qquad \sin\tfrac{\pi}{2} \;=\; 1,$$

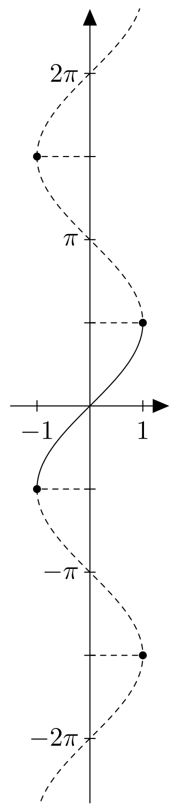
niin käänteisfunktion olemassaoloa koskevan lauseen 4.29 (s. 107) nojalla funktiolla $f\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$,

$$f(x) = \sin x$$

on olemassa jatkuva ja aidosti kasvava käänteisfunktio $f^{-1}\colon [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

$$f^{-1}(x) \;=\; \arcsin x,$$

jota usein kutsutaan *arkussinin* päähaaraksi.[1]



Kuva 6.2: Arkussinin päähaara (yhtenäinen viiva) ja sivuhaaroja (katkoviiva).

Huomautus 6.1. Siis $\arcsin x$ on sellainen kulma väliltä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, että sen sini on x eli

$$\sin(\arcsin x) \;=\; x$$

kaikilla $x \in [-1, 1]$. Vastaavasti

$$\arcsin(\sin x) \;=\; x$$

kaikilla $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Huomautus 6.2. Koska $\sin(-x) = -\sin x$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin

$$\begin{aligned} y = \arcsin(-x) \;&\Leftrightarrow\; \sin y = -x \\ &\Leftrightarrow\; -\sin y = x \\ &\Leftrightarrow\; \sin(-y) = x \\ &\Leftrightarrow\; -y = \arcsin x \\ &\Leftrightarrow\; y = -\arcsin x \end{aligned}$$

kaikilla $x \in [-1, 1]$. Siis

$$\arcsin(-x) \;=\; -\arcsin x$$

määrittelyalueellaan.

[1]Päähaaraa merkitään joskus $\overline{\text{arc}}\sin x$.

Esimerkki 6.1. Sinin perustuloksia[1] ja huomautusta 6.2 käyttäen saadaan

- $\arcsin 0 \;=\; 0,$ sillä $\sin 0 = 0,$
- $\arcsin 1 \;=\; \frac{\pi}{2},$ sillä $\sin\frac{\pi}{2} = 1,$
- $\arcsin(-1) \;=\; -\frac{\pi}{2},$ sillä $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1,$
- $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} \;=\; \frac{\pi}{4}$ ja $\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{2}}) \;=\; -\frac{\pi}{4},$ sillä $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Esimerkki 6.2. Osoitetaan, että $\cos(\arcsin x)$ on algebrallinen funktio.

Koska $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, niin

$$\cos x \;=\; \pm\sqrt{1-\sin^2 x} \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Siis

$$\cos(\arcsin x) \;=\; +\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} \;=\; \sqrt{1-x^2} \qquad \forall x \in [-1,1]. \tag{6.1}$$

Kaavassa (6.1) on valittava merkki $+$, sillä $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ja kosini on tällä välillä positiivinen (tai nolla).

Toinen tapa todistaa väite on tarkastella (kun $x \in \,]0,1[\,$) suorakulmaista kolmiota, jonka hypotenuusa on 1 ja kateetit x sekä $\sqrt{1-x^2}$. Koska hypotenuusan ja kateetin $\sqrt{1-x^2}$ välinen kulma on $\arcsin x$, tulos seuraa suoraan kosinin määritelmästä (viereisen kateetin suhde hypotenuusaan). Erikoispisteet ($x = 0, 1$) on tarkasteltava erikseen, ja välillä $[-1, 0[$ voidaan käyttää huomautusta 6.2 ja kaavaa $\cos(-x) = \cos x$ (vrt. esimerkki 6.4, s. 144).

Sivuhaarat

Vastaavasti funktio $f_1\colon [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \to [-1,1]$,

$$f_1(x) \;=\; \sin x$$

on jatkuva ja aidosti vähenevä välillä $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Siis funktiolla f_1 on jatkuva ja aidosti vähenevä käänteisfunktio $f_1^{-1}\colon [-1,1] \to [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Koska

$$\pi - \arcsin x \in [\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}]$$

ja[2]

$$\sin(\pi - \arcsin x) \;=\; \sin(\arcsin x) \;=\; x,$$

niin

$$f_1^{-1}(x) \;=\; \pi - \arcsin x.$$

[1]Huomaa muistikolmio eli suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituus on 1.

[2]Tässä käytetään trigonometrian kaavaa $\sin(\pi - x) \;=\; \sin x$.

Koska yleisesti

$$\sin(x + n2\pi) \;=\; \sin x \qquad (n \in \mathbf{Z}),$$

on sinin rajoittumalla väliin $[-\frac{\pi}{2} + n2\pi, \frac{\pi}{2} + n2\pi]$ jatkuva ja aidosti kasvava käänteisfunktio, joka on määritelty välillä $[-1, 1]$ ja jolla on lauseke

$$\arcsin x + n2\pi \qquad (n \in \mathbf{Z}).$$

Vastaavasti funktion $\sin x$ rajoittumalla väliin $[\frac{\pi}{2} + n2\pi, \frac{3\pi}{2} + n2\pi]$ on välillä $[-1, 1]$ määritelty jatkuva ja aidosti vähenevä käänteisfunktio, jolla on lauseke

$$\pi - \arcsin x + n2\pi \qquad (n \in \mathbf{Z}).$$

Jos nyt $\underline{\mathrm{arc}}\sin x$ tarkoittaa mitä tahansa reaalilukua y, jolle $\sin y = x$, niin sen kaikki arvot saadaan kaavasta (arvoja on ääretön määrä)

$$\underline{\mathrm{arc}}\sin x = \begin{cases} \arcsin x + n2\pi, & n \in \mathbf{Z}, \\ \pi - \arcsin x + n2\pi, & n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Derivaatta

Päähaaraa tarkasteltaessa todettiin, että funktio $f(x) = \sin x$ on jatkuva, aidosti kasvava sekä derivoituva välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ja että

$$f'(x) \;=\; \cos x \;>\; 0 \qquad \forall x \in \,]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[.$$

Täten $\arcsin x$ on lauseen 5.6 (s. 127) nojalla derivoituva kaikilla $x \in \,]-1, 1[$. Olkoon nyt $y = \arcsin x$. Tällöin käänteisfunktion derivoimiskaavan (s. 127) ja esimerkin 6.2 perusteella

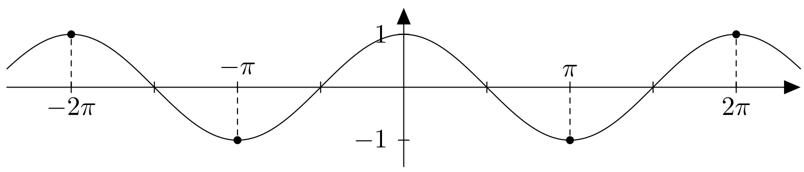
$$D(\arcsin x) \;=\; \frac{1}{D(\sin y)} \;=\; \frac{1}{\cos y} \;=\; \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

kaikilla $x \in \,]-1, 1[$. Vastaavasti yleistettynä saadaan

$$D(\arcsin x + n2\pi) \;=\; D(\arcsin x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad x \in \,]-1, 1[\,,\; n \in \mathbf{Z},$$

ja

$$D(\pi - \arcsin x + n2\pi) \;=\; -D(\arcsin x) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in \,]-1, 1[\,,\; n \in \mathbf{Z}.$$



Kuva 6.3: Funktion $\cos x$ kuvaaja origon ympäristössä.

6.1.2 Arkuskosini

Tarkastellaan nyt funktiota

$$f(x) = \cos x.$$

Vastaavasti kuin luvussa 6.1.1 havaitaan, että $\cos x$ on jatkuva ja aidosti vähenevä välillä $[0, \pi]$, sillä

$$f'(x) \;=\; -\sin x \;\leq\; 0 \qquad \forall x \in [0, \pi]$$

ja yhtäsuuruus on voimassa vain, kun $x = 0$ ja $x = \pi$. Koska lisäksi välin päätepisteissä

$$\cos 0 \;=\; 1 \qquad \text{ja} \qquad \cos \pi \;=\; -1,$$

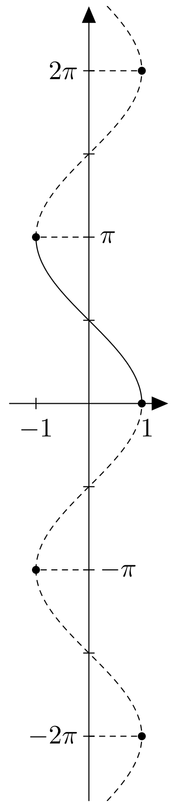
niin funktiolla $f\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$,

$$f(x) \;=\; \cos x$$

on olemassa jatkuva ja aidosti vähenevä käänteisfunktio $f^{-1}\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$,

$$f^{-1}(x) \;=\; \operatorname{arc}\cos x,$$

jota usein kutsutaan *arkuskosinin* päähaaraksi.[1]



Kuva 6.4: Arkuskosinin päähaara (yhtenäinen viiva) ja sivuhaaroja (katkoviiva).

Huomautus 6.3. Siis $\operatorname{arc}\cos x$ on sellainen kulma väliltä $[0, \pi]$, että sen kosini on x eli

$$\cos(\operatorname{arc}\cos x) \;=\; x$$

kaikilla $x \in [-1, 1]$. Vastaavasti

$$\operatorname{arc}\cos(\cos x) \;=\; x$$

kaikilla $x \in [0, \pi]$.

[1] Päähaaraa merkitään joskus $\overline{\operatorname{arc}}\cos x$.

Huomautus 6.4. Koska $\cos(\pi - x) = -\cos x$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin

$$\arccos(-x) \;=\; \pi - \arccos x$$

määrittelyalueellaan (harjoitustehtävä, vrt. huomautus 6.2, s. 140).

Esimerkki 6.3. Kosinin perustuloksia ja huomautusta 6.4 käyttäen saadaan

- $\arccos 0 \;=\; \frac{\pi}{2}$, sillä $\cos\frac{\pi}{2} = 0$,
- $\arccos(-1) \;=\; \pi$, sillä $\cos\pi = -1$,
- $\arccos 1 \;=\; 0$, sillä $\cos 0 = 1$,
- $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} \;=\; \frac{\pi}{4}$ ja $\arccos(-\frac{1}{\sqrt{2}}) \;=\; \pi - \frac{\pi}{4} \;=\; \frac{3\pi}{4}$, sillä $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esimerkki 6.4. Osoitetaan, että

$$\sin(\arccos x) \;=\; \sqrt{1-x^2} \qquad \forall x \in [-1,1].$$

1°: Olkoon aluksi $x \in \,]0,1[\,$. Tarkastellaan taas (vrt. esimerkki 6.2) suorakulmaista kolmiota, jonka hypotenuusa on 1 ja kateetit x sekä $\sqrt{1-x^2}$. Koska hypotenuusan ja kateetin x välinen kulma on $\arccos x$, tulos seuraa suoraan sinin määritelmästä (vastakkaisen kateetin suhde hypotenuusaan).

2°: Jos $x = 0$ tai $x = 1$, niin tulos saadaan laskemalla kyseiset arvot (ks. esimerkki 6.3).

3°: Olkoon sitten $x \in [-1,0[$. Käyttämällä huomautusta 6.4, kaavaa

$$\sin(\pi - y) \;=\; \sin y \qquad \forall y \in \mathbf{R}$$

sekä kohtia 1° ja 2° saadaan

$$\begin{aligned}\sin(\arccos x) &= \sin(\pi - \arccos(-x)) \\ &= \sin(\arccos(-x)) \\ &= \sqrt{1-(-x)^2} \\ &= \sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

Kohdista 1°–3° seuraa, että väite pätee kaikilla $x \in [-1,1]$.

Sivuhaarat

Vastaavalla tavalla kuin sinille voidaan osoittaa (harjoitustehtävä), että kosinin rajoittumalla väliin $[n2\pi, \pi + n2\pi]$ on välillä $[-1, 1]$ määritelty jatkuva ja aidosti vähenevä käänteisfunktio

$$f^{-1}(x) \;=\; \arccos x + n2\pi \qquad (n \in \mathbf{Z}).$$

Vastaavasti rajoittumalla väliin $[\pi + n2\pi, 2\pi + n2\pi]$ on välillä $[-1, 1]$ määritelty jatkuva ja aidosti kasvava käänteisfunktio

$$f^{-1}(x) \;=\; 2\pi - \arccos x + n2\pi \qquad (n \in \mathbf{Z}).$$

Jos siis $\underline{\mathrm{arc}}\cos x$ tarkoittaa mitä tahansa reaalilukua y, jolle $\cos y = x$, niin sen kaikki arvot saadaan kaavasta (arvoja on ääretön määrä)

$$\underline{\mathrm{arc}}\cos x = \begin{cases} \arccos x + n2\pi, & n \in \mathbf{Z}, \\ 2\pi - \arccos x + n2\pi, & n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Derivaatta

Vastaavalla tavalla kuin arkussinille voidaan osoittaa (harjoitustehtävä), että kosinin käänteisfunktio $\arccos x$ on derivoituva kaikilla $x \in\,]-1, 1[$. Lisäksi käänteisfunktion derivoimiskaavan ja esimerkin 6.4 perusteella (kun $y = \arccos x$)

$$D(\arccos x) \;=\; \frac{1}{D(\cos y)} \;=\; \frac{1}{-\sin y} \;=\; -\frac{1}{\sin(\arccos x)} \;=\; -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

kaikilla $x \in\,]-1, 1[$. Vastaavasti yleistettynä saadaan

$$D(\arccos x + n2\pi) \;=\; D(\arccos x) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in\,]-1, 1[\,,\; n \in \mathbf{Z},$$

ja

$$D(2\pi - \arccos x + n2\pi) \;=\; -D(\arccos x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in\,]-1, 1[\,,\; n \in \mathbf{Z}.$$

Huomautus 6.5. Kaikilla $x \in [-1,1]$ pätee

$$\arc\sin x + \arc\cos x \;=\; \tfrac{\pi}{2}.$$

Todistus. Välin päätepisteissä väite pätee esimerkkien 6.1 (s. 141) ja 6.3 (s. 144) perusteella. Tarkastellaan siis väliä $]-1,1[$. Koska

$$D(\arc\sin x + \arc\cos x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \;=\; 0 \qquad \forall x \in\,]-1,1[\,,$$

niin integraalilaskennan peruslauseen (lause 5.15, s. 135) nojalla on olemassa sellainen vakio $C \in \mathbf{R}$, että

$$\arc\sin x + \arc\cos x \;=\; C \qquad \forall x \in\,]-1,1[\,.$$

Koska

$$\arc\sin 0 + \arc\cos 0 \;=\; 0 + \tfrac{\pi}{2} \;=\; \tfrac{\pi}{2},$$

niin

$$C \;=\; \tfrac{\pi}{2}.$$

Siis

$$\arc\sin x + \arc\cos x \;=\; \tfrac{\pi}{2} \qquad \forall x \in\,]-1,1[\,. \qquad \square$$

6.1.3 Arkustangentti

Tarkastellaan funktiota

$$f(x) \;=\; \tan x \;=\; \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Koska $\sin x$ ja $\cos x$ ovat jatkuvia kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja $\cos x > 0$ kaikilla $x \in\,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, niin f on jatkuva välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Lisäksi (esimerkki 5.13, s. 121)

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{\cos^2 x} \;>\; 0 \qquad \forall x \in\,]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[,$$

joten f on lauseen 5.19 (s. 136) nojalla aidosti kasvava välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Koska

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} \tan x \;=\; -\infty \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \tan x \;=\; \infty$$

(harjoitustehtävä), niin funktiolla $f \colon\,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\, \to \mathbf{R}$,

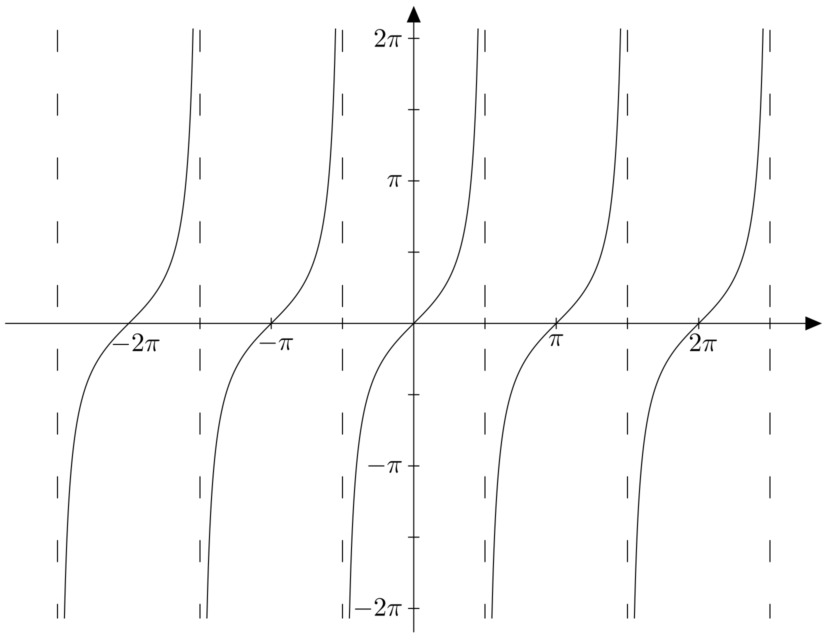
$$f(x) \;=\; \tan x$$

on huomautuksen 4.31 (s. 108) nojalla jatkuva ja aidosti kasvava käänteisfunktio $f^{-1} \colon \mathbf{R} \to\,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$f^{-1}(x) \;=\; \arc\tan x,$$

jota usein kutsutaan *arkustangentin* päähaaraksi[1] (ks. kuva 6.6, s. 148).

[1]Päähaaraa merkitään joskus $\overline{\arc}\tan x$.



Kuva 6.5: Funktion $\tan x$ kuvaaja origon ympäristössä.

Huomautus 6.6. Siis $\arctan x$ on sellainen kulma väliltä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, että sen tangentti on x eli

$$\tan(\arctan x) \;=\; x$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Vastaavasti

$$\arctan(\tan x) \;=\; x$$

kaikilla $x \in\,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Huomautus 6.7. Koska $\tan(-x) = -\tan x$ tangentin määrittelyalueella, niin

$$\arctan(-x) \;=\; -\arctan x$$

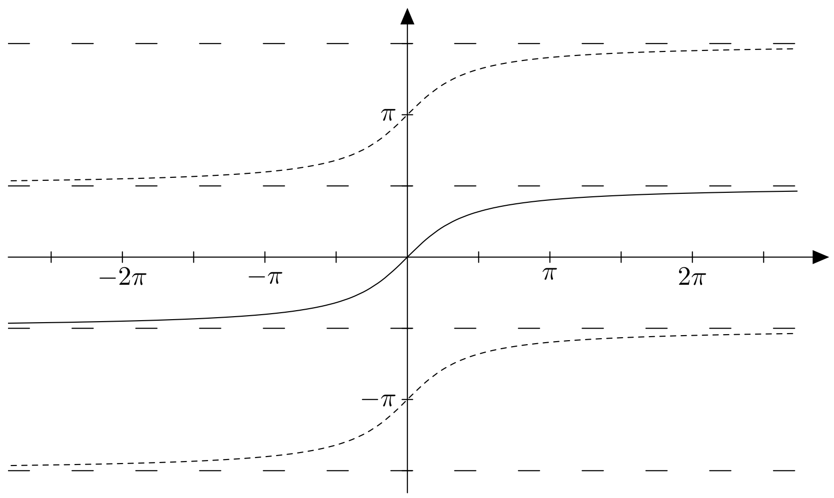
kaikilla $x \in \mathbf{R}$ (harjoitustehtävä, vrt. huomautus 6.2, s. 140).

Huomautus 6.8. Arkustangentin määrittelystä seuraa suoraan, että

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x \;=\; -\tfrac{\pi}{2} \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to\infty} \arctan x \;=\; \tfrac{\pi}{2}.$$

Esimerkki 6.5. Tangentin perustuloksia ja huomautusta 6.7 käyttäen saadaan

- $\arctan 0 \;=\; 0$, sillä $\tan 0 = 0$,
- $\arctan 1 \;=\; \frac{\pi}{4}$ ja $\arctan(-1) \;=\; -\frac{\pi}{4}$, sillä $\tan\frac{\pi}{4} = 1$.



Kuva 6.6: Arkustangentin päähaara (yhtenäinen viiva) ja kaksi sivuhaaraa (katkoviivat).

Sivuhaarat

Koska tangentin perusjakso on π, niin (harjoitustehtävä) funktion $\tan x$ rajoittumalla väliin $]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$ on aidosti kasvava käänteisfunktio, joka on määritelty kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja jolla on lauseke

$$\arctan x + n\pi \qquad (n \in \mathbf{Z}).$$

Jos siis $\underline{\mathrm{arc}}\tan x$ tarkoittaa mitä tahansa reaalilukua y, jolle $\tan y = x$, niin sen kaikki arvot saadaan kaavasta (arvoja on ääretön määrä)

$$\underline{\mathrm{arc}}\tan x \ = \ \arctan x + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Derivaatta

Vastaavalla tavalla kuin arkussinille voidaan osoittaa (harjoitustehtävä), että tangentin käänteisfunktio $\arctan x$ on derivoituva kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Käyttämällä käänteisfunktion derivoimiskaavaa (s. 127) ja tangentin derivaattaa (esimerkki 5.13, s. 121) saadaan (kun $y = \arctan x$)

$$D(\arctan x) \ = \ \frac{1}{D(\tan y)} \ = \ \frac{1}{1+\tan^2 y} \ = \ \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} \ = \ \frac{1}{1+x^2}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Vastaavasti yleistettynä saadaan

$$D(\arctan x + n\pi) \ = \ D(\arctan x) \ = \ \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbf{R}, \ n \in \mathbf{Z}.$$

Esimerkki 6.6. Osoitetaan, että

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{kun } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Olkoon

$$f(x) \;=\; \arctan x + \arctan \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0).$$

Tällöin f on derivoituva väleillä $]-\infty, 0[$ ja $]0, \infty[$. Lisäksi

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot (-\frac{1}{x^2}) \;=\; \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \;=\; 0 \qquad (x \neq 0).$$

Täten integraalilaskennan peruslauseen (lause 5.15, s. 135) nojalla on olemassa sellaiset $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$, että

$$f(x) = \begin{cases} C_1, & \text{kun } x > 0, \\ C_2, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Koska (ks. esimerkki 6.5)

$$f(1) \;=\; \arctan 1 + \arctan 1 \;=\; \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{4} \;=\; \tfrac{\pi}{2}$$

ja

$$f(-1) \;=\; \arctan(-1) + \arctan(-1) \;=\; (-\tfrac{\pi}{4}) + (-\tfrac{\pi}{4}) \;=\; -\tfrac{\pi}{2},$$

niin

$$C_1 \;=\; \tfrac{\pi}{2} \qquad \text{ja} \qquad C_2 \;=\; -\tfrac{\pi}{2},$$

mistä esimerkin tulos seuraa.

6.1.4 Arkuskotangentti

Tarkastellaan funktiota

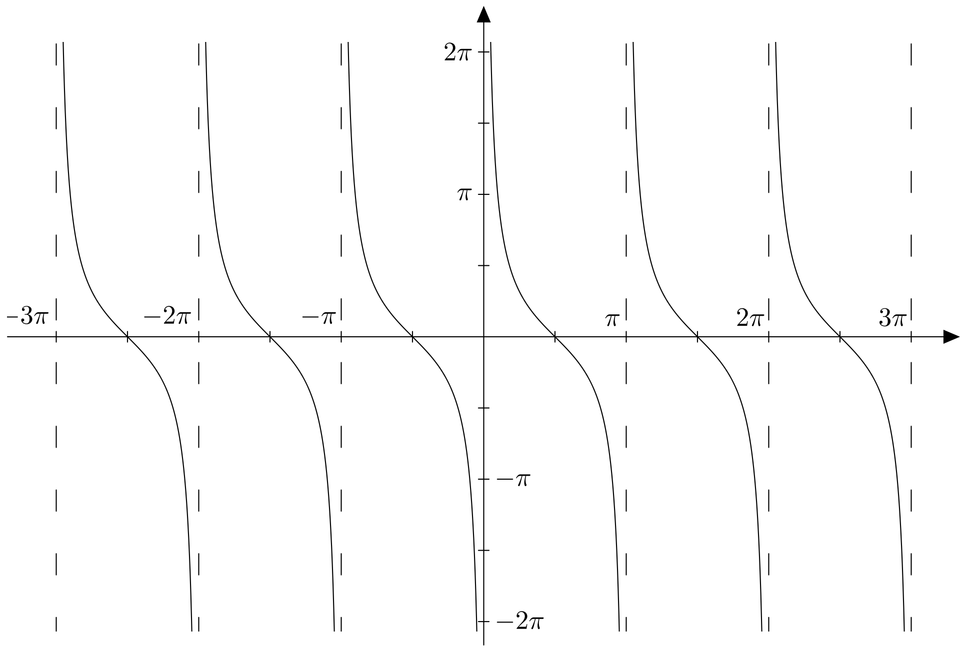
$$f(x) \;=\; \cot x \;=\; \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Koska $\sin x$ ja $\cos x$ ovat jatkuvia kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja $\sin x > 0$ kaikilla $x \in]0, \pi[$, niin funktio f on jatkuva välillä $]0, \pi[$. Lisäksi (esimerkki 5.13, s. 121)

$$f'(x) \;=\; -\frac{1}{\sin^2 x} \;<\; 0 \qquad \forall x \in]0, \pi[\,,$$

joten f on lauseen 5.21 (s. 137) nojalla aidosti vähenevä välillä $]0, \pi[$. Koska

$$\lim_{x \to 0+} \cot x \;=\; \infty \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x \to \pi-} \cot x \;=\; -\infty$$



Kuva 6.7: Funktion $\cot x$ kuvaaja välillä $]-3\pi, 3\pi[$.

(harjoitustehtävä), niin funktiolla $f\colon\ ]0,\pi[\ \to \mathbf{R}$,

$$f(x) \;=\; \cot x$$

on huomautuksen 4.31 (s. 108) nojalla jatkuva ja aidosti vähenevä käänteisfunktio $f^{-1}\colon \mathbf{R} \to\ ]0,\pi[$,

$$f^{-1}(x) \;=\; \operatorname{arc}\cot x,$$

jota usein kutsutaan *arkuskotangentin* päähaaraksi[1] (ks. kuva 6.8, s. 151).

Huomautus 6.9. Siis $\operatorname{arc}\cot x$ on sellainen kulma väliltä $]0,\pi[$, että sen kotangentti on x eli

$$\cot(\operatorname{arc}\cot x) \;=\; x$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Vastaavasti

$$\operatorname{arc}\cot(\cot x) \;=\; x$$

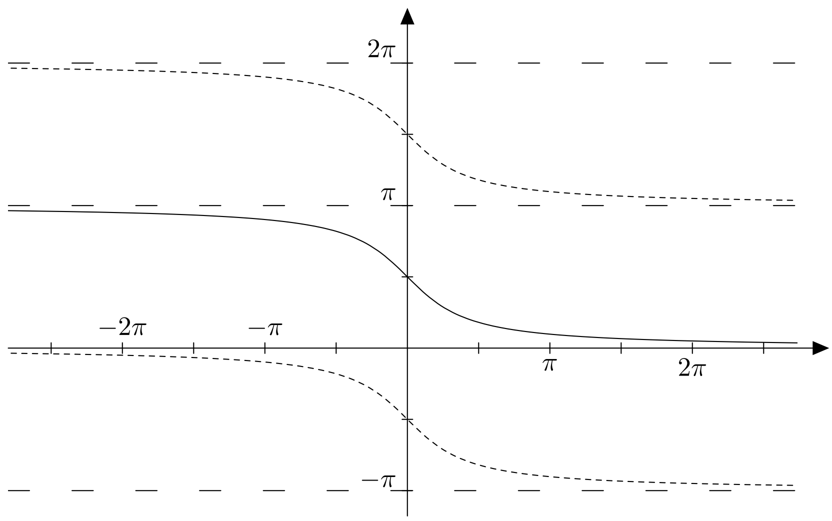
kaikilla $x \in\ ]0,\pi[$.

Huomautus 6.10. Koska $\cot(\pi - x) = -\cot x$ kotangentin määrittelyalueella, niin

$$\operatorname{arc}\cot(-x) \;=\; \pi - \operatorname{arc}\cot x$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$ (harjoitustehtävä, vrt. huomautus 6.2, s. 140).

[1]Päähaaraa merkitään joskus $\overline{\operatorname{arc}}\cot x$.



Kuva 6.8: Arkuskotangentin päähaara (yhtenäinen viiva) ja kaksi sivuhaaraa (katkoviivat).

Huomautus 6.11. Arkuskotangentin määrittelystä seuraa suoraan, että

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arc} \cot x \ = \ \pi \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x \to \infty} \operatorname{arc} \cot x \ = \ 0.$$

Esimerkki 6.7. Kotangentin perustuloksia ja huomautusta 6.10 käyttäen saadaan

- $\operatorname{arc}\cot 0 \ = \ \frac{\pi}{2}$, sillä $\cot \frac{\pi}{2} = 0$,
- $\operatorname{arc}\cot 1 \ = \ \frac{\pi}{4}$ ja $\operatorname{arc}\cot(-1) \ = \ \pi - \frac{\pi}{4} \ = \ \frac{3\pi}{4}$, sillä $\cot \frac{\pi}{4} = 1$.

Sivuhaarat

Koska kotangentin perusjakso on π, niin (harjoitustehtävä) funktion $\cot x$ rajoittumalla väliin $]n\pi, \pi + n\pi[$ on aidosti vähenevä käänteisfunktio, joka on määritelty kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja jolla on lauseke

$$\operatorname{arc}\cot x + n\pi \qquad (n \in \mathbf{Z}).$$

Jos siis $\underline{\operatorname{arc}}\cot x$ tarkoittaa mitä tahansa reaalilukua y, jolle $\cot y = x$, niin sen kaikki arvot saadaan kaavasta (arvoja on ääretön määrä)

$$\underline{\operatorname{arc}}\cot x \ = \ \operatorname{arc}\cot x + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Derivaatta

Vastaavalla tavalla kuin arkussinille voidaan osoittaa (harjoitustehtävä), että kotangentin käänteisfunktio $\operatorname{arc\,cot} x$ on derivoituva kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Käyttämällä käänteisfunktion derivoimiskaavaa (s. 127) ja kotangentin derivaattaa (esimerkki 5.13, s. 121) saadaan (kun $y = \operatorname{arc\,cot} x$)

$$D(\operatorname{arc\,cot} x) \;=\; \frac{1}{D(\cot y)} \;=\; \frac{1}{-1-\cot^2 y} \;=\; -\,\frac{1}{1+\cot^2(\operatorname{arc\,cot} x)} \;=\; -\,\frac{1}{1+x^2}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Vastaavasti yleistettynä saadaan

$$D(\operatorname{arc\,cot} x + n\pi) \;=\; D(\operatorname{arc\,cot} x) \;=\; -\,\frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbf{R},\; n \in \mathbf{Z}.$$

Huomautus 6.12. Kaikilla $x \in \mathbf{R}$ pätee

$$\operatorname{arc\,tan} x + \operatorname{arc\,cot} x \;=\; \tfrac{\pi}{2}.$$

Todistus. Koska

$$D(\operatorname{arc\,tan} x + \operatorname{arc\,cot} x) \;=\; \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \;=\; 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

niin integraalilaskennan peruslauseen (lause 5.15, s. 135) nojalla on olemassa sellainen vakio $C \in \mathbf{R}$, että

$$\operatorname{arc\,tan} x + \operatorname{arc\,cot} x \;=\; C \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Lisäksi (ks. esimerkit 6.5 ja 6.7)

$$\operatorname{arc\,tan} 1 + \operatorname{arc\,cot} 1 \;=\; \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{4} \;=\; \tfrac{\pi}{2},$$

joten

$$C \;=\; \tfrac{\pi}{2}.$$

Siis

$$\operatorname{arc\,tan} x + \operatorname{arc\,cot} x \;=\; \tfrac{\pi}{2} \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

$\square$

6.2 Eksponenttifunktio

Aiemmin (s. 45–49) on määritelty, että

$$e \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}.$$

Edelleen on määritelty (esimerkki 4.23, s. 109), että

$$e^{\frac{m}{n}} \;=\; \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^m \;=\; \left(\sqrt[n]{e}\right)^m, \quad \text{kun } m\in\mathbf{Z} \text{ ja } n\in\mathbf{Z}_+,$$

joten funktio (ks. kuva 6.9, s. 162)

$$f(x) \;=\; e^x$$

on määritelty kaikilla rationaaliluvuilla. Pyritään nyt määrittelemään f siten, että funktio tulee jatkuvaksi kaikilla reaaliluvuilla. Koska rationaalilukuja on tiheästi reaalilukujen joukossa, tämä määrittely voidaan tehdä vain yhdellä tavalla (ks. esimerkki 4.16, s. 100).

6.2.1 Rationaaliluku eksponenttina

Ennen varsinaista eksponenttifunktion määrittelyä todetaan muutamia rationaaliluvuilla määritellyn eksponenttifunktion ominaisuuksia.

Lause 6.13. *Jos $n\in\mathbf{Z}_+$ ja $n\ge 2$, niin*

$$\frac{1}{n} \;<\; e^{\frac{1}{n}}-1 \;<\; \frac{1}{n-1}.$$

Todistus. Esimerkin 2.17 (s. 49) nojalla

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;<\; e \;<\; \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

kaikilla $n\in\mathbf{Z}_+$. Valitsemalla epäyhtälön oikealla puolella luvun n sijasta luku $n-1$ saadaan

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;<\; e \;<\; \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

kaikilla $n\ge 2$. Täten

$$1+\frac{1}{n} \;<\; e^{\frac{1}{n}} \;<\; 1+\frac{1}{n-1},$$

eli

$$\frac{1}{n} \;<\; e^{\frac{1}{n}}-1 \;<\; \frac{1}{n-1}$$

kaikilla $n\ge 2$. □

Lause 6.14. *Jos $x \in \mathbf{Q}_+$, niin $e^x > 1$.*

Todistus. Tulos seuraa suoraan lauseesta 6.13 ja rationaalipotenssin laskusäännöistä. □

Lause 6.15. *Jos $x_1, x_2 \in \mathbf{Q}$, niin $e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$.*

Todistus. Selvä rationaalipotenssin laskusääntöjen perusteella. □

Lause 6.16. *Jos $x_1, x_2 \in \mathbf{Q}$ ja $x_1 < x_2$, niin $e^{x_1} < e^{x_2}$.*

Todistus. Koska $x_2 = x_1 + x_3$, missä $x_3 \in \mathbf{Q}_+$, niin tulos seuraa suoraan lauseista 6.14 ja 6.15. □

Lause 6.17. *Jos $x_n \in \mathbf{Q}$ $(n \in \mathbf{Z}_+)$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, niin $\lim\limits_{n\to\infty} e^{x_n} = 1$.*

Todistus. Koska $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, niin

$$\forall p \in \mathbf{Z}_+ \colon \exists n_p \in \mathbf{Z}_+ \text{ s.e. } -\tfrac{1}{p} < x_n < \tfrac{1}{p} \text{ aina, kun } n > n_p.$$

Tällöin lauseen 6.16 nojalla

$$e^{-\frac{1}{p}} \;<\; e^{x_n} \;<\; e^{\frac{1}{p}} \tag{6.2}$$

aina, kun $n > n_p$. Toisaalta lauseen 6.13 nojalla

$$0 \;<\; \tfrac{1}{p} \;<\; e^{\frac{1}{p}} - 1 \;<\; \tfrac{1}{p-1} \qquad \forall p \geq 2,$$

joten suppiloperiaatteen nojalla

$$\lim_{p\to\infty} (e^{\frac{1}{p}} - 1) \;=\; 0.$$

Siis

$$\lim_{p\to\infty} e^{\frac{1}{p}} \;=\; 1$$

ja

$$\lim_{p\to\infty} e^{-\frac{1}{p}} \;=\; \lim_{p\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{p}}} \;=\; 1.$$

Täten suppiloperiaatteen ja ehdon (6.2) nojalla

$$\lim_{n\to\infty} e^{x_n} \;=\; 1.$$

□

Lause 6.18. *Jos* $x, x_n \in \mathbf{Q}$ $(n \in \mathbf{Z}_+)$ *ja* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$*, niin* $\lim_{n\to\infty} e^{x_n} = e^x$.

Todistus. Lauseen 6.15 nojalla

$$e^{x_n} \; = \; e^{x_n - x + x} \; = \; e^{x_n - x} e^x.$$

Koska

$$x_n - x \in \mathbf{Q} \qquad \text{ja} \qquad \lim_{n\to\infty} (x_n - x) = 0,$$

niin lauseen 6.17 nojalla

$$\lim_{n\to\infty} e^{x_n - x} \; = \; 1.$$

Siis

$$\lim_{n\to\infty} e^{x_n} \; = \; \lim_{n\to\infty} e^{x_n - x} e^x \; = \; 1 \cdot e^x \; = \; e^x.$$

□

6.2.2 Eksponenttifunktion määrittely ja perusominaisuuksia

Olkoon $x \in \mathbf{R}$. Tällöin joukko

$$E_x = \{e^r \,|\, r < x, r \in \mathbf{Q}\}$$

on lauseen 6.16 nojalla ylhäältä rajoitettu (ylärajaksi kelpaa mikä tahansa e^q, jolle $x < q$ $(q \in \mathbf{Q})$). Täten joukolla E_x on pienin yläraja ja voidaan asettaa seuraava määritelmä.

Määritelmä 6.1. Olkoon $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Silloin

$$e^x = \sup \{e^r \,|\, r < x, r \in \mathbf{Q}\}.$$

Tutkitaan sitten saadun *eksponenttifunktion* e^x ominaisuuksia.

Lause 6.19. *Olkoon* $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ *ja* $x_n \in \mathbf{Q}$ $(n \in \mathbf{Z}_+)$*. Jos* $x_n < x$ *kaikilla* $n \in \mathbf{Z}_+$ *ja* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$*, niin*

$$\lim_{n\to\infty} e^{x_n} \; = \; e^x.$$

Todistus. Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Olkoon

$$E_x = \{e^r \,|\, r < x, r \in \mathbf{Q}\}.$$

Koska $e^x = \sup E_x$, niin lauseen 1.17 (s. 19) nojalla on olemassa sellainen $r \in \mathbf{Q}$, että $r < x$ ja

$$e^x - \varepsilon \; < \; e^r \; \leq \; e^x. \tag{6.3}$$

Lisäksi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{ja} \qquad x_n < x \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+,$$

joten lukujonon raja-arvon perusominaisuuksien nojalla on olemassa sellainen rajaluku $n_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+$, että

$$r \;<\; x_n \;<\; x \qquad \forall n > n_\varepsilon.$$

Täten lauseen 6.16 ja luvun e^x määrittelyn ($e^{x_n} \in E_x, e^x = \sup E_x$) perusteella

$$e^r \;<\; e^{x_n} \;\leq\; e^x \qquad \forall n > n_\varepsilon.$$

Siis ehdon (6.3) nojalla

$$e^x - \varepsilon \;<\; e^{x_n} \;\leq\; e^x \qquad \forall n > n_\varepsilon,$$

joten lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella

$$\lim_{n\to\infty} e^{x_n} \;=\; e^x.$$

□

Lause 6.20. *Jos* $x, y \in \mathbf{R}$, *niin* $e^{x+y} = e^x e^y$.

Todistus. Tarkastellaan[1] sellaisia lukujonoja (x_n) ja (y_n), että

$$x_n \in \mathbf{Q}, \quad x_n < x \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

sekä

$$y_n \in \mathbf{Q}, \quad y_n < y \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Tällöin

$$x_n + y_n \;<\; x + y \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+ \qquad \text{ja} \qquad \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) \;=\; x + y.$$

Täten lauseen 6.18 (rationaaliluvut) ja lauseen 6.19 (irrationaaliluvut) nojalla

$$\lim_{n\to\infty} e^{x_n} \;=\; e^x, \quad \lim_{n\to\infty} e^{y_n} \;=\; e^y \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} e^{x_n+y_n} \;=\; e^{x+y}.$$

Käyttämällä lisäksi lausetta 6.15 ja lukujonon raja-arvon laskusääntöjä (lause 2.13, s. 32) saadaan

$$e^{x+y} \;=\; \lim_{n\to\infty} e^{x_n+y_n} \;=\; \lim_{n\to\infty} (e^{x_n} e^{y_n}) \;=\; \lim_{n\to\infty} e^{x_n} \cdot \lim_{n\to\infty} e^{y_n} \;=\; e^x e^y.$$

□

[1] Tällaiset lukujonot voidaan aina löytää esimerkiksi valitsemalla alkiot väleiltä $]x - \frac{1}{n}, x[$ ja $]y - \frac{1}{n}, y[$ $(n \in \mathbf{Z}_+)$.

Lause 6.21. *Eksponenttifunktio on positiivinen eli $e^x > 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.*

Todistus. Lauseen 6.20 nojalla

$$e^x \;=\; e^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} \;=\; e^{\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}} \;=\; \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \;\geq\; 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

On siis enää osoitettava, että $e^x \neq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellainen $x_0 \in \mathbf{R}$, että $e^{x_0} = 0$. Tällöin lauseen 6.20 perusteella

$$e^x \;=\; e^{x_0+x-x_0} \;=\; \overbrace{e^{x_0}}^{=0} e^{x-x_0} \;=\; 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

missä on ristiriita, sillä $e^1 = e > 0$. $\square$

Huomautus 6.22. Lauseista 6.20 ja 6.21 seuraa suoraan ($x \in \mathbf{R}$)

$$e^{-x} \;=\; e^{-x} \cdot \frac{e^x}{e^x} \;=\; e^{-x+x} \cdot \frac{1}{e^x} \;=\; e^0 \cdot \frac{1}{e^x} \;=\; \frac{1}{e^x}.$$

Lause 6.23. *Eksponenttifunktio e^x on aidosti kasvava (joukossa $\mathbf{R}$).*

Todistus. Lauseen 6.16 nojalla $e^h > e^0 = 1$, jos $h > 0$ ja $h \in \mathbf{Q}$. Jos taas $h > 0$ ja $h \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, niin seurauksen 1.19 (s. 22) nojalla on olemassa sellainen $r \in \mathbf{Q}$, että $0 < r < h$. Tällöin lauseen 6.16 ja luvun e^h määrittelyn perusteella

$$1 \;=\; e^0 \;<\; e^r \;\leq\; e^h.$$

Siis $e^h > 1$ kaikilla $h > 0$. Käyttämällä nyt lauseita 6.20 ja 6.21 saadaan

$$e^{x+h} - e^x \;=\; e^x e^h - e^x \;=\; \overbrace{e^x}^{>0} \overbrace{(e^h - 1)}^{>0} \;>\; 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R} \text{ ja } \forall h > 0.$$

Täten e^x on aidosti kasvava (joukossa $\mathbf{R}$). $\square$

Lause 6.24. *Eksponenttifunktio e^x on jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R}$.*

Todistus. Tarkastellaan ensin funktiota e^x pisteessä $x = 0$. Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Lauseen 6.17 nojalla

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} \;=\; \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}} \;=\; 1,$$

joten lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+$, että

$$\left|e^{\frac{1}{n}} - 1\right| \;<\; \varepsilon \quad \text{ja} \quad \left|e^{-\frac{1}{n}} - 1\right| \;<\; \varepsilon \quad \text{aina, kun } n \geq n_\varepsilon.$$

Koska lisäksi e^x on lauseen 6.23 nojalla aidosti kasvava (ja $e^0 = 1$), niin

$$0 \;<\; e^x - 1 \;<\; e^{\frac{1}{n_\varepsilon}} - 1 \;<\; \varepsilon \quad \text{aina, kun } 0 < x < \tfrac{1}{n_\varepsilon},$$

ja

$$-\varepsilon \;<\; e^{-\frac{1}{n_\varepsilon}} - 1 \;<\; e^x - 1 \;<\; 0 \quad \text{aina, kun } -\tfrac{1}{n_\varepsilon} < x < 0.$$

Siis

$$|e^x - 1| \;<\; \varepsilon \quad \text{aina, kun } 0 < |x| < \tfrac{1}{n_\varepsilon},$$

joten funktion raja-arvon määritelmän perusteella

$$\lim_{x\to 0} e^x \;=\; 1 \; (= e^0).$$

Olkoon sitten $x \in \mathbf{R}$ mielivaltainen. Tällöin lauseen 6.20 nojalla

$$e^{x+h} - e^x \;=\; e^x e^h - e^x \;=\; e^x(e^h - 1) \;\to\; e^x \cdot 0 \;=\; 0, \quad \text{kun } h \to 0.$$

Siis

$$\lim_{h\to 0} e^{x+h} \;=\; e^x,$$

eli e^x on jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R}$. □

Eksponenttifunktion derivaatan määrittämistä varten todistetaan vielä seuraava raja-arvo.

Lause 6.25. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \;=\; 1.$

Todistus. Osoitetaan ensin, että

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^x - 1}{x} \;=\; 1.$$

Olkoon $0 < x < \frac{1}{2}$. Arkhimedeen lauseen (lause 1.18, s. 21) nojalla on olemassa sellainen $n_x \in \mathbf{Z}_+$, että $n_x\, x > 1$. Koska $x < \frac{1}{2}$, niin $n_x \geq 3$. Olkoon nyt n_x pienin tällaisista luvuista, jolloin $(n_x - 1)x \leq 1$. Täten

$$n_x - 1 \;\leq\; \frac{1}{x} \;<\; n_x \tag{6.4}$$

ja

$$\frac{1}{n_x} \;<\; x \;\leq\; \frac{1}{n_x - 1}.$$

Koska eksponenttifunktio on aidosti kasvava (lause 6.23), niin lauseen 6.13 nojalla

$$\frac{1}{n_x} \;<\; e^{\frac{1}{n_x}} - 1 \;<\; e^x - 1 \;\leq\; e^{\frac{1}{n_x - 1}} - 1 \;<\; \frac{1}{n_x - 2}.$$

Siis

$$\frac{1}{n_x} \;<\; e^x - 1 \;<\; \frac{1}{n_x - 2},$$

joten (koska $x > 0$)

$$\frac{1}{n_x\, x} \;<\; \frac{e^x - 1}{x} \;<\; \frac{1}{(n_x - 2)x}.$$

Siis ehdon (6.4) nojalla

$$\frac{n_x - 1}{n_x} \;\le\; \frac{1}{n_x\, x} \;<\; \frac{e^x - 1}{x} \;<\; \frac{1}{(n_x - 2)x} \;<\; \frac{n_x}{n_x - 2}.$$

Lisäksi ehdon (6.4) nojalla $n_x \to \infty$, kun $x \to 0+$, joten

$$\lim_{x\to 0+} \frac{n_x - 1}{n_x} \;=\; 1 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{n_x}{n_x - 2} \;=\; 1.$$

Siis suppiloperiaatteen nojalla

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^x - 1}{x} \;=\; 1.$$

Jos sitten $x < 0$, niin huomautuksen 6.22 nojalla

$$\frac{e^x - 1}{x} \;=\; \frac{e^{-|x|} - 1}{-\,|x|} \;=\; \frac{1 - \frac{1}{e^{|x|}}}{|x|} \;=\; \underbrace{\frac{1}{e^{|x|}}}_{\to 1} \underbrace{\left(\frac{e^{|x|} - 1}{|x|}\right)}_{\to 1} \;\to\; 1, \quad \text{kun } x \to 0-\,.$$

Siis

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \;=\; 1.$$

□

Lause 6.26. *Eksponenttifunktio e^x on derivoituva ja*

$$D(e^x) \;=\; e^x$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Todistus. Olkoon $x \in \mathbf{R}$. Tällöin lauseiden 6.20 ja 6.25 perusteella

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} e^x \underbrace{\left(\frac{e^h - 1}{h}\right)}_{\to 1} \;=\; e^x \cdot 1 \;=\; e^x.$$

Siis e^x on derivoituva ja $D(e^x) = e^x$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. □

Lause 6.27. *Eksponenttifunktiolle* $e^x \geq 1 + x$ *kaikilla* $x \in \mathbf{R}$ *ja* $e^x = 1 + x$ *täsmälleen silloin, kun* $x = 0$.

Todistus. Jos $x = 0$, niin

$$e^x = 1 + x \ \ (= 1).$$

Muiden arvojen tutkimiseksi tarkastellaan apufunktiota

$$g(x) = e^x - 1 - x,$$

jolloin

$$g'(x) = e^x - 1$$

(lause 6.26).

Koska $e^0 = 1$, niin $g'(0) = 0$. Lisäksi e^x on aidosti kasvava (lause 6.23), joten

$$g'(x) < 0 \quad \forall x < 0 \qquad \text{ja} \qquad g'(x) > 0 \quad \forall x > 0.$$

Koska $g'(x)$ on jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R}$ (lause 6.24), niin $g(x)$ on aidosti vähenevä, kun $x \leq 0$ (lause 5.21, s. 137), ja aidosti kasvava, kun $x \geq 0$ (lause 5.19, s. 136).

Koska $g(0) = 0$, niin

$$g(x) = e^x - 1 - x > 0,$$

kun $x < 0$ tai $x > 0$. Siis

$$e^x > 1 + x \qquad \forall x \neq 0.$$

□

Huomautus 6.28. Lauseen 6.27 ja huomautuksen 6.22 nojalla

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Esimerkki 6.8. Osoitetaan, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty.$$

Jos $x > 0$, niin lauseiden 6.20 ja 6.27 nojalla

$$e^x = e^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}} \geq \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$$

ja edelleen

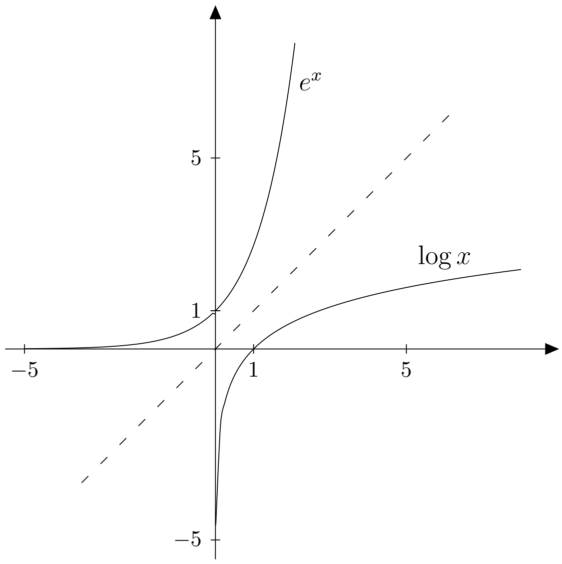
$$\frac{e^x}{x} \geq \frac{x^2}{4x} = \frac{x}{4}.$$

Siis

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty.$$

Esimerkki 6.9. Esimerkin 6.8 seurauksena saadaan välittömästi, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0.$$



Kuva 6.9: Funktioiden e^x ja $\log x$ kuvaajat ovat symmetrisiä suoran $y = x$ suhteen.

6.3 Logaritmifunktio

Luvussa 6.2 osoitettiin, että eksponenttifunktio e^x on jatkuva ja aidosti kasvava funktio joukolta $\mathbf{R}$ joukolle $\mathbf{R}_+$. Täten sillä on jatkuva ja aidosti kasvava käänteisfunktio joukolta $\mathbf{R}_+$ joukolle $\mathbf{R}$. Tämä käänteisfunktio, jota kutsutaan *logaritmifunktioksi* ja jota merkitään[1] $\log x$, on siis määritelty kaikilla $x > 0$, ja

$$\log x = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x.$$

Siis

$$(6.5) \qquad e^{\log x} = x \quad \forall x > 0 \qquad \text{ja} \qquad \log e^x = x \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Erityisesti $\log 1 = 0$ ja $\log e = 1$. Edelleen

$$\lim_{x \to 0+} \log x = -\infty \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x \to \infty} \log x = \infty,$$

sillä huomautuksen 6.28 nojalla

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x \to \infty} e^x = \infty.$$

Koska $De^x = e^x$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$ (lause 6.26, s. 159) ja $e^x > 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$ (lause 6.21, s. 157), niin $\log x$ on lauseen 5.6 (s. 127) nojalla derivoituva kaikilla $x > 0$ ja ($y = \log x$)

$$D(\log x) = \frac{1}{De^y} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}.$$

[1] Tällä kurssilla merkintä $\log x$ tarkoittaa luonnollista logaritmia.

Tarkastellaan seuraavaksi muutamia logaritmifunktion laskusääntöjä ja ominaisuuksia.

Lause 6.29. *Olkoon $x, y > 0$. Silloin*

(i) $\log(xy) \;=\; \log x + \log y,$

(ii) $\log \frac{1}{x} \;=\; -\log x,$

(iii) $\log \frac{x}{y} \;=\; \log x - \log y,$

(iv) $\log x^r \;=\; r \log x \quad (r \in \mathbf{Q}).$[1]

Todistus. (i) Lauseen 6.20 (s. 156) nojalla

$$e^{\log x + \log y} \;=\; e^{\log x} e^{\log y} \;=\; xy \;=\; e^{\log(xy)}.$$

Koska e^x on aidosti kasvava, niin tällöin myös

$$\log x + \log y \;=\; \log(xy).$$

(ii) Kohdan (i) nojalla

$$\log x + \log \frac{1}{x} \;=\; \log\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) \;=\; \log 1 \;=\; 0,$$

joten

$$\log \frac{1}{x} \;=\; -\log x.$$

(iii) Seuraa kohdista (i) ja (ii).

(iv) Jos $r = 0$, niin väiteyhtälön molemmat puolet ovat nollia, ja jos $r \in \mathbf{Z}_+$, niin tulos seuraa induktiolla kohdasta (i). Jos $r \in \mathbf{Z}_-$, niin hyödyntämällä tapausta $-m \in \mathbf{Z}_+$ ja kohtaa (ii) saadaan[2]

$$\log x^m \;=\; \log\left(\frac{1}{x}\right)^{-m} \;=\; (-m) \log \frac{1}{x} \;=\; m \log x.$$

Siis

$$\log x^m \;=\; m \log x \qquad \forall m \in \mathbf{Z}. \tag{6.6}$$

[1] Yleistyy kaikille $r \in \mathbf{R}$, ks. huomautus 6.33 (s. 167).

[2] Esitettyjen perustelujen lisäksi todistuksessa käytetään tavanomaisia rationaalipotenssien laskusääntöjä.

Jos $r \notin \mathbf{Z}$, niin $r = \frac{m}{n}$, missä $m \in \mathbf{Z}$ ja $n \in \mathbf{Z}_+$. Tällöin ehdon (6.6) perusteella

$$\log x^{\frac{1}{n}} \;=\; \frac{1}{n} \cdot n \cdot \log x^{\frac{1}{n}} \;=\; \frac{1}{n} \log \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n \;=\; \frac{1}{n} \log x$$

ja edelleen

$$\log x^r \;=\; \log x^{\frac{m}{n}} \;=\; \log \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m \;=\; m \log x^{\frac{1}{n}} \;=\; m \cdot \frac{1}{n} \cdot \log x \;=\; r \log x.$$

$\square$

Lause 6.30. *Logaritmifunktiolle* $\log x \leq x - 1$ *kaikilla* $x > 0$ *ja* $\log x = x - 1$ *täsmälleen silloin, kun* $x = 1$.

Todistus. Lauseen 6.27 (s. 160) nojalla

$$x \;=\; e^{\log x} \;\geq 1 \;+ \log x \qquad \forall x > 0$$

ja

$$x \;=\; e^{\log x} \;=\; 1 + \log x$$

täsmälleen silloin, kun $\log x = 0$ eli $x = 1$. $\square$

Esimerkki 6.10. Osoitetaan, että

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} \;=\; 0.$$

Esimerkin 6.8 (s. 160) nojalla

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} \;=\; \infty,$$

joten

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\log x} \;=\; \lim_{x \to \infty} \frac{e^{\log x}}{\log x} \;=\; \infty.$$

Siis

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} \;=\; 0.$$

Esimerkki 6.11. Osoitetaan, että

$$\lim_{x \to 0+} x \log x = 0.$$

Logaritmin laskusääntöjen ja esimerkin 6.10 perusteella

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0+} x \log x &= \lim_{x \to 0+} x\Big(-\log \tfrac{1}{x}\Big) \\
&= \lim_{x \to 0+} \frac{-\log \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{z \to \infty} -\frac{\log z}{z} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esimerkki 6.12. Esimerkin 6.11 seurauksena havaitaan, että funktio

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = 0, \\ x \log x, & \text{kun } x > 0, \end{cases}$$

on jatkuva, kun $x \geq 0$.

Esimerkki 6.13. Osoitetaan, että

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Olkoon $f(z) = \log z$ $(z > 0)$. Tällöin

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x) - \log 1}{x} = f'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

6.4 Yleinen eksponentti-, logaritmi- ja potenssifunktio

6.4.1 Yleinen eksponenttifunktio

Olkoon nyt $a > 0$. Tarkoituksena on määritellä a^x kaikilla $x \in \mathbf{R}$ siten, että jos $x \in \mathbf{Q}$ ($x = \frac{m}{n}$), niin

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m .$$

Jos $a > 0$ ja $x \in \mathbf{Q}$, niin ehdon (6.5) (s. 162) ja lauseen 6.29 (s. 163) kohdan (iv) perusteella

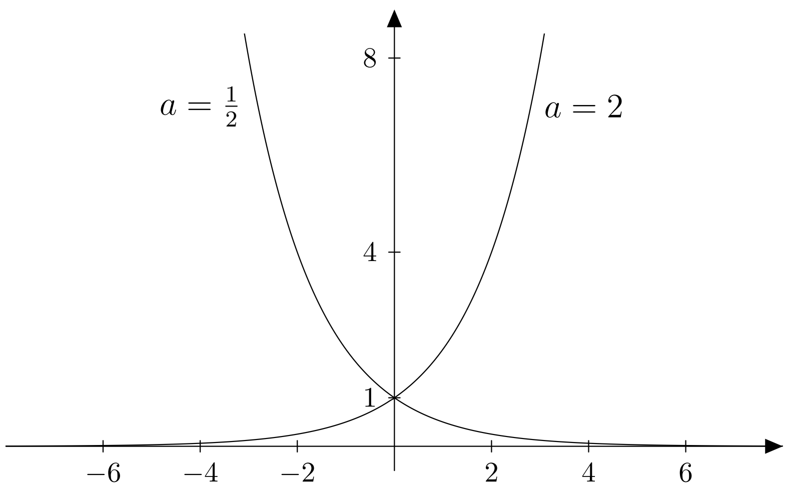
$$a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a}.$$

Näin ollen on luonnollista määritellä *yleinen eksponenttifunktio* vastaavasti kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Määritelmä 6.2. Olkoon $a > 0$. Tällöin $a^x = e^{x \log a}$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Huomautus 6.31. Koska eksponenttifunktio e^x on jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R}$, myös yleinen eksponenttifunktio a^x ($a > 0$) on jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Huomautus 6.32. Koska $e^x > 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin myös $a^x > 0$ ($a > 0$) kaikilla $x \in \mathbf{R}$.



Kuva 6.10: Funktion a^x kuvaaja, kun $a = \frac{1}{2}$ ja $a = 2$. Kuvaajat ovat symmetrisiä y-akselin suhteen.

Huomautus 6.33. Yleisen eksponenttifunktion määritelmästä seuraa suoraan, että

$$\log a^x \;=\; \log e^{x\log a} \;=\; x\log a$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Täten lauseen 6.29 (s. 163) kohta (iv) voidaan yleistää muotoon

$$\log x^y \;=\; y\log x \qquad \forall x > 0,\ \forall y \in \mathbf{R}.$$

Lause 6.34. *Olkoon $a, b > 0$ ja $x, y \in \mathbf{R}$. Tällöin*

(i) *jos $0 < a < 1$, niin a^x on aidosti vähenevä ja*

$$\lim_{x\to-\infty} a^x \;=\; \infty \qquad \textit{sekä} \qquad \lim_{x\to\infty} a^x \;=\; 0,$$

(ii) *jos $a > 1$, niin a^x on aidosti kasvava ja*

$$\lim_{x\to-\infty} a^x \;=\; 0 \qquad \textit{sekä} \qquad \lim_{x\to\infty} a^x \;=\; \infty,$$

(iii) $a^{x+y} \;=\; a^x a^y,\ (a^x)^y \;=\; a^{xy},\ (ab)^x \;=\; a^x b^x.$

Todistus. (i) Väite seuraa suoraan siitä, että tällöin $\log a < 0$.

(ii) Väite seuraa suoraan siitä, että tällöin $\log a > 0$.

(iii) Käyttämällä yleisen eksponenttifunktion määritelmää ja lausetta 6.20 (s. 156) saadaan

$$a^{x+y} \;=\; e^{(x+y)\log a} \;=\; e^{x\log a + y\log a} \;=\; e^{x\log a}e^{y\log a} \;=\; a^x a^y.$$

Vastaavasti käyttämällä logaritmin laskusääntöjä saadaan

$$\log(a^x)^y \;=\; y\log a^x \;=\; xy\log a \;=\; \log a^{xy}.$$

Koska logaritmifunktio on aidosti kasvava, niin tällöin

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Kolmannen ominaisuuden todistus jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

Huomautus 6.35. Huomautuksesta 6.31 ja lauseesta 6.34 seuraa suoraan, että yleinen eksponenttifunktio a^x $(a > 0, a \neq 1)$ on bijektio $\mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$.

Lause 6.36. *Olkoon $a > 0$. Tällöin a^x on derivoituva kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja*

$$D(a^x) \;=\; a^x \log a.$$

Todistus. Laskemalla saadaan

$$D(a^x) \;=\; D(e^{x\log a}) \;=\; e^{x\log a}D(x\log a) \;=\; e^{x\log a}\log a \;=\; a^x\log a.$$

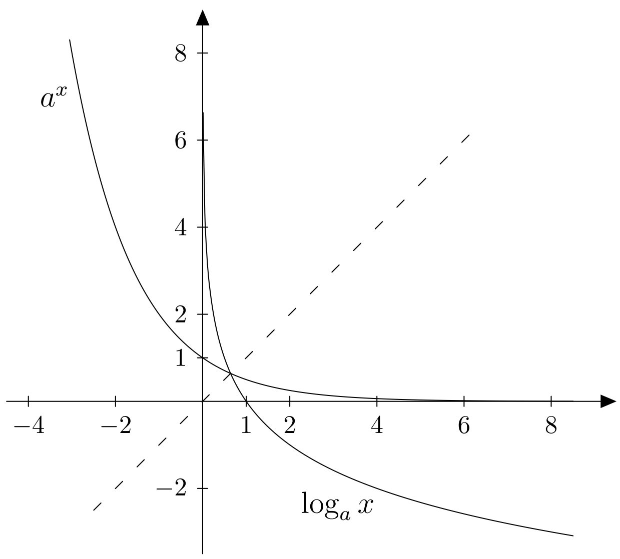
$\square$

6.4.2 Yleinen (a-kantainen) logaritmifunktio

Kuten luvussa 6.4.1 todettiin, on yleinen eksponenttifunktio a^x jatkuva ja aidosti monotoninen bijektio $\mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$, kun $a > 0$ ja $a \neq 1$. Siis funktiolla a^x on käänteisfunktio $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, kun $a > 0$ ja $a \neq 1$. Käänteisfunktiota kutsutaan *yleiseksi* tai *a-kantaiseksi logaritmifunktioksi* ja merkitään $\log_a x$ (joskus käytetään myös merkintää ${}^a\!\log x$). Siis

$$a^y = x \iff \log_a x = y \qquad (x > 0).$$

Huomautus 6.37. Koska a^x on jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R}$, on myös $\log_a x$ jatkuva kaikilla $x > 0$. Edelleen koska a^x on aidosti vähenevä, kun $0 < a < 1$, niin myös $\log_a x$ on aidosti vähenevä, kun $0 < a < 1$. Vastaavasti $\log_a x$ on aidosti kasvava, kun $a > 1$.



Kuva 6.11: Funktioiden a^x ja $\log_a x$ kuvaajat, kun $a = \frac{1}{2}$. Kuvaajat ovat symmetrisiä suoran $y = x$ suhteen.

Huomautus 6.38. Koska

$$\log x = \log\left(a^{\log_a x}\right) = \log_a x \cdot \log a,$$

niin

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a},$$

kun $x > 0$, $a > 0$ ja $a \neq 1$.

Huomautus 6.39. Huomautuksesta 6.38 seuraa suoraan, että logaritmin laskusäännöt ovat voimassa myös yleiselle logaritmifunktiolle (harjoitustehtävä). Esimerkiksi

$$\log_a(xy) \;=\; \log_a x + \log_a y$$

kaikilla $x, y > 0$ (ja kun $a > 0, a \neq 1$).

Huomautus 6.40. Olkoon $a > 0$ ja $a \neq 1$. Koska $D(a^x) = a^x \log a$ (lause 6.36) ja $a^x \log a \neq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin $\log_a x$ on lauseen 5.6 (s. 127) nojalla derivoituva kaikilla $x > 0$. Derivaataksi saadaan huomautuksen 6.38 nojalla

$$D(\log_a x) \;=\; D\Big(\frac{\log x}{\log a}\Big) \;=\; \frac{1}{\log a} \cdot \frac{1}{x} \;=\; \frac{1}{x \log a}.$$

6.4.3 Yleinen potenssifunktio

Jos $f(x) > 0$, niin käyttämällä muunnoskaavaa

$$f(x)^{g(x)} \;=\; e^{\log f(x)^{g(x)}} \;=\; e^{g(x)\log f(x)} \tag{6.7}$$

voidaan määritellä funktio $f(x)^{g(x)}$. Funktion $f(x)^{g(x)}$ ominaisuudet voidaan tällöin palauttaa kaavan (6.7) avulla funktion $g(x) \log f(x)$ ominaisuuksiin. Jos esimerkiksi f ja g ovat derivoituvia, niin funktion $f(x)^{g(x)}$ derivaatta voidaan laskea käyttämällä yhdistetyn funktion derivointikaavaa, jolloin

$$D(f(x)^{g(x)}) \;=\; e^{g(x)\log f(x)} D(g(x) \log f(x)) \;=\; f(x)^{g(x)} D(g(x) \log f(x)).$$

Esimerkki 6.14. Olkoon

$$f(x) \;=\; x^x \;=\; e^{\log x^x} \;=\; e^{x \log x} \qquad (x > 0).$$

Tällöin

$$\lim_{x\to\infty} x^x \;=\; \lim_{x\to\infty} e^{x\log x} \;=\; \infty$$

ja koska esimerkin 6.11 (s. 165) perusteella

$$\lim_{x\to 0+} x \log x \;=\; 0,$$

niin

$$\lim_{x\to 0+} x^x \;=\; \lim_{x\to 0+} e^{x \log x} \;=\; e^0 \;=\; 1.$$

Lisäksi

$$f'(x) \;=\; e^{x\log x} \cdot D(x \log x) \;=\; e^{x \log x} \cdot \Big(1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x}\Big) \;=\; (\log x + 1)\, x^x.$$

Esimerkki 6.15. Osoitetaan, että funktio

$$f(x) \;=\; x^{2+\log x} \qquad (x > 0)$$

on aidosti kasvava, kun $x \geq \frac{1}{e}$.

Koska

$$f(x) \;=\; x^{2+\log x} \;=\; e^{\log x^{2+\log x}} \;=\; e^{(2+\log x)\log x} \;=\; e^{2\log x + \log^2 x},$$

niin f on selvästi jatkuva, kun $x > 0$. Lisäksi

$$\begin{aligned} f'(x) \;&=\; e^{2\log x+\log^2 x} \cdot D\Big(2\log x + \log^2 x\Big) \\ &=\; e^{2\log x+\log^2 x} \cdot \Big(2\cdot\frac{1}{x} \;+\; 2\log x \cdot \frac{1}{x}\Big) \\ &=\; \frac{2(1+\log x)}{x} \cdot x^{2+\log x}. \end{aligned}$$

Nyt $\log x \;\geq\; -1$, kun $x \geq e^{-1}$ eli $x \geq \frac{1}{e}$. Täten

$$f'(x) \;\geq\; 0 \qquad \forall x \geq \tfrac{1}{e}.$$

Lisäksi yhtäsuuruus on voimassa vain pisteessä $x = \frac{1}{e}$. Siis $f(x)$ on aidosti kasvava, kun $x \geq \frac{1}{e}$ (lause 5.19, s. 136).

Esimerkki 6.16. Osoitetaan, että

$$\lim_{x\to\infty} \Big(1 + \frac{a}{x}\Big)^x = e^a \qquad (a \in \mathbf{R}).$$

Koska

$$\Big(1 + \frac{a}{x}\Big)^x \;=\; e^{\log\left(1+\frac{a}{x}\right)^x} \;=\; e^{x\log\left(1+\frac{a}{x}\right)},$$

niin tehtävä palautuu raja-arvon

$$\lim_{x\to\infty} x\log\Big(1+\frac{a}{x}\Big) \tag{6.8}$$

määrittämiseen.

Jos $a = 0$, niin raja-arvo (6.8) on selvästi 0 $(= a)$. Jos taas $a \neq 0$ ja $x \to \infty$, niin $z = \frac{a}{x} \to 0$ ja esimerkin 6.13 (s. 165) nojalla

$$\lim_{x\to\infty} x\log\Big(1+\frac{a}{x}\Big) \;=\; \lim_{x\to\infty} a\cdot\frac{\log(1+\frac{a}{x})}{\frac{a}{x}} \;=\; \lim_{z\to 0} a\cdot\frac{\log(1+z)}{z} \;=\; a.$$

Siis

$$\lim_{x\to\infty} \Big(1+\frac{a}{x}\Big)^x \;=\; \lim_{x\to\infty} e^{x\log\left(1+\frac{a}{x}\right)} \;=\; e^a.$$

Esimerkki 6.17. Olkoon $x > 0$ ja $a \in \mathbf{R}$. Tällöin voidaan määritellä *yleinen potenssifunktio*

$$x^a = e^{a \log x}.$$

Vastaavasti kuin yleiselle eksponenttifunktiolle voidaan osoittaa, että määritelmä yhtyy aiemmin esitettyyn rationaalilukupotenssin määritelmään ja normaalit laskusäännöt ovat voimassa. Lisäksi yleinen potenssifunktio x^a on jatkuva sekä aidosti kasvava, kun $a > 0$, ja aidosti vähenevä, kun $a < 0$. Kun $a = 0$, niin $x^a \equiv 1$. Funktion e^x raja-arvoista seuraa suoraan, että

$$\lim_{x\to\infty} x^a = \lim_{x\to\infty} e^{a \log x} = \begin{cases} \infty, & \text{kun } a > 0, \\ 1, & \text{kun } a = 0, \\ 0, & \text{kun } a < 0, \end{cases}$$

ja

$$\lim_{x\to 0+} x^a = \lim_{x\to 0+} e^{a \log x} = \begin{cases} 0, & \text{kun } a > 0, \\ 1, & \text{kun } a = 0, \\ \infty, & \text{kun } a < 0. \end{cases}$$

Potenssifunktio on myös derivoituva ja

$$D(x^a) = D(e^{a \log x}) = e^{a \log x} D(a \log x) = e^{a \log x} \cdot a \cdot \frac{1}{x} = a x^a \frac{1}{x} = a x^{a-1}.$$

Kun $a > 0$, voidaan lisäksi määritellä $0^a = 0$. Tällöin potenssifunktion määrittely laajentuu välille $[0, \infty[$ ja $f(x) = x^a$ on jatkuva sekä aidosti kasvava välillä $[0, \infty[$ (harjoitustehtävä).

Esimerkin 5.7 (s. 117) tapaan saadaan, että $f'(0+) = 0$, jos $a > 1$, ja $f'(0+) = 1$, jos $a = 1$. Jos $0 < a < 1$, niin $f'(0+)$ ei ole olemassa (sen arvo lähestyy ääretöntä). Täten x^a on välillä $[0, \infty[$ myös derivoituva, jos $a \geq 1$.

7 Derivoituvan funktion ominaisuuksia

7.1 Väliarvolauseen yleistys, l'Hospitalin sääntö

Lause 7.1 (Yleistetty väliarvolause)**.** *Jos funktiot f ja g ovat jatkuvia suljetulla välillä $[a,b]$ ja derivoituvia avoimella välillä $]a,b[$, niin on olemassa sellainen piste $\xi \in]a,b[$, että*

$$g'(\xi)\,[f(b)-f(a)] = f'(\xi)\,[g(b)-g(a)]\,. \tag{7.1}$$

Todistus. Olkoon

$$h(x) = f(x)\,[g(b)-g(a)] - g(x)\,[f(b)-f(a)]\,.$$

Tällöin h on jatkuva välillä $[a,b]$ ja derivoituva välillä $]a,b[$, sillä f ja g ovat jatkuvia välillä $[a,b]$ ja derivoituvia välillä $]a,b[$. Lisäksi

$$h(a) \;=\; f(a)g(b) - f(a)g(a) - g(a)f(b) + g(a)f(a) \;=\; f(a)g(b) - f(b)g(a)$$

ja

$$h(b) \;=\; f(b)g(b) - f(b)g(a) - g(b)f(b) + g(b)f(a) \;=\; f(a)g(b) - f(b)g(a),$$

joten

$$h(a) = h(b).$$

Siis h toteuttaa Rollen lauseen (lause 5.10, s. 131) edellytykset, joten on olemassa sellainen $\xi \in]a,b[$, että $h'(\xi) = 0$ eli

$$f'(\xi)\,[g(b)-g(a)] - g'(\xi)\,[f(b)-f(a)] = 0.$$

□

Huomautus 7.2. Jos lauseessa 7.1 tehdään funktiolle g lisäoletus, että $g'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in]a,b[$, saadaan

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \qquad \text{(Cauchyn väliarvokaava).} \tag{7.2}$$

Todistus. Jos olisi $g(a) = g(b)$, niin Rollen lausetta (lause 5.10, s. 131) voitaisiin soveltaa funktioon g välillä $[a,b]$, jolloin olisi olemassa sellainen $\xi_1 \in]a,b[$, että

$$g'(\xi_1) = 0,$$

mikä on vastoin huomautuksen oletuksia.

Siis on oltava $g(a) \neq g(b)$, jolloin kaavassa (7.1) voidaan jakaa puolittain lausekkeilla $g(b) - g(a)$ ja $g'(\xi)$. □

Huomautus 7.3. Jos lauseessa 7.1 valitaan $g(x) = x$ (kaikilla $x \in [a, b]$), saadaan tavallinen differentiaalilaskennan väliarvolause.

Lause 7.4 (l'Hospitalin sääntö).[1] *Oletetaan, että*

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ *ja* $\lim_{x \to a} g(x) = 0$,

(ii) $\lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *on olemassa.*

Tällöin myös funktiolla f/g on raja-arvo pisteessä $x = a$ ja

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Todistus. Koska raja-arvo

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

on olemassa, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $f'(x)$ ja $g'(x)$ ovat olemassa puhkaistussa ympäristössä $\mathrm{U}'_\delta(a)$ sekä lisäksi $g'(x) \neq 0$ tässä ympäristössä. Määritellään[2] nyt

$$f(a) = g(a) = 0,$$

jolloin f ja g tulevat jatkuviksi pisteessä a.

Valitaan nyt $x \in \mathrm{U}'_\delta(a)$. Tällöin f ja g ovat jatkuvia välillä $[a, x]$ (tai $[x, a]$) ja derivoituvia välillä $]a, x[$ (tai $]x, a[$). Siis Cauchyn väliarvokaavan (7.2) nojalla on olemassa sellainen $\xi \in]a, x[$ (tai $\xi \in]x, a[$), että

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Jos nyt $x \to a$, myös $\xi \to a$. Siis

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

L'Hospitalin sääntöä voidaan soveltaa myös toispuoleisiin raja-arvoihin sekä tapauksiin, joissa tarkastellaan raja-arvoa äärettömyydessä tai joissa raja-arvo on ääretön (huomautukset 7.5–7.7, todistukset jätetään harjoitustehtäväksi).

[1] Myös l'Hôpitalin sääntö.

[2] Lauseen oletusten perusteella ei tiedetä, ovatko funktiot f ja g määriteltyjä pisteessä a. Jos niitä ei ole määritelty, niin määritellään ne nyt. Jos ne on määritelty, mutta $f(a) \neq 0$ tai $g(a) \neq 0$, niin muutetaan kyseisten funktioiden määrittelyä. Tämä voidaan tehdä, sillä funktioiden arvolla pisteessä a ei ole vaikutusta etsittyyn raja-arvoon.

Huomautus 7.5. Lauseen 7.4 laskusääntöä voidaan soveltaa myös $\frac{\infty}{\infty}$ -muotoisille raja-arvoille (ts. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ (tai $-\infty$)). Edelleen laskusääntöä voidaan soveltaa myös toispuoleisiin raja-arvoihin.

Huomautus 7.6. Lauseessa 7.4 voi a olla myös $\pm\infty$.

Huomautus 7.7. Lauseessa 7.4 voi raja-arvo $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ olla myös $\pm\infty$.

Esimerkki 7.1. Määritetään

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x}.$$

Koska funktiot x ja $\tan x$ ovat derivoituvia pisteen 0 jossakin ympäristössä sekä

$$\lim_{x\to 0} x = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to 0} \tan x = 0,$$

niin l'Hospitalin säännön nojalla

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} \overset{\text{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\tan^2 x} = 1.$$

Yhtälöketju on tässä luettava ikään kuin lopusta alkuun. Koska

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\tan^2 x} = 1$$

(eli raja-arvo on olemassa ja $= 1$), niin l'Hospitalin sääntöä voidaan soveltaa ja saadaan yllä oleva tulos.

Esimerkki 7.2. Jos asia on ilmeistä, l'Hospitalin sääntöä käytettäessä ei aina erikseen korosteta, että tarkasteltavat funktiot toteuttavat vaadittavat ehdot. Esimerkiksi voidaan kirjoittaa yksinkertaisesti

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{15}+x-2}{x^{11}-3x+2} \overset{\text{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{15x^{14}+1}{11x^{10}-3} = \frac{15+1}{11-3} = 2.$$

Vaadittavien ehtojen toteutuminen on kuitenkin aina tarkistettava. Erityisesti on syytä huomata, että sääntöä ei voi käyttää, jos kyseessä ei ole mikään yllä oleva epämääräinen muoto (ks. kuitenkin huomautus 7.8, s. 177). Esimerkiksi

$$\lim_{x\to 1} \underbrace{\frac{x^2+2}{x^2-1}}_{\to\pm\infty} \neq \lim_{x\to 1} \frac{2x}{2x} = 1.$$

Esimerkki 7.3. Olkoon $a > 1$ ja $s \in \mathbf{R}$. Osoitetaan, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^s} = \infty \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^s}{a^x} = 0.$$

1°: Olkoon $s = 0$. Tällöin

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^s} = \lim_{x\to\infty} a^x = \infty.$$

2°: Olkoon $s < 0$. Tällöin

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^s} = \lim_{x\to\infty} x^{-s}a^x = \infty.$$

3°: Olkoon $s > 0$. Käyttämällä l'Hospitalin sääntöä saadaan (tapaus $s = 1$)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x} \overset{\text{H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{a^x \log a}{1} = \infty.$$

Koska myös $a^{\frac{1}{s}} > 1$, niin

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^s} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\left(a^{\frac{1}{s}}\right)^s\right)^x}{x^s} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\left(a^{\frac{1}{s}}\right)^x\right)^s}{x^s} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\left(a^{\frac{1}{s}}\right)^x}{x}\right)^s = \infty.$$

Siis kohtien 1°–3° perusteella

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^s} = \infty$$

ja edelleen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^s}{a^x} = 0.$$

Esimerkki 7.4. Esimerkin 7.3 perusteella

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^s}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^s}{e^{\log x}} = 0$$

kaikilla $s \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 7.5. Olkoon $s > 0$. Käyttämällä l'Hospitalin sääntöä saadaan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^s} \overset{\text{H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{sx^{s-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{sx^s} = 0.$$

Esimerkki 7.6. Muunnetaan lauseke $\infty - \infty$ ensin sopivaan muotoon, ja sovelletaan sitten l'Hospitalin sääntöä kaksi kertaa peräkkäin. Siis

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \\
&\overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \\
&\overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2 + x} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 7.7. Määritetään raja-arvo

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}.$$

Käyttämällä suoraan l'Hospitalin sääntöä saadaan

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{-\left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}}}{1} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = ?$$

eli lauseke vain monimutkaistuu. Siirtymällä muotoa $\frac{0}{0}$ olevasta lausekkeesta muotoon $\frac{\infty}{\infty}$ saadaan

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

Yksinkertaisemmilla laskuilla selvitään tekemällä muuttujanvaihdos ($z = \frac{1}{x}$), jolloin

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{z\to\infty} \frac{e^{-z}}{\frac{1}{z}} = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{e^z} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{z\to\infty} \frac{1}{e^z} = 0.$$

Huomautus 7.8. Jos tarkasteltava lauseke ei ole suoraan l'Hospitalin säännön vaatimassa muodossa, lauseke voidaan joskus muuntaa sopivaan muotoon. Esimerkissä 7.6 tarkasteltiin jo tapausta $\infty - \infty$. Muotoa $0 \cdot \infty$ olevat lausekkeet saadaan myös helposti muotoon $\frac{0}{0}$ tai $\frac{\infty}{\infty}$. Muotoa 0^0, 1^∞ ja ∞^0 olevat lausekkeet taas voidaan muuntaa

$$0^0 = (0+)^0 = e^{\log(0+)^0} = e^{0\log(0+)} = e^{0\cdot(-\infty)},$$

$$1^\infty = e^{\log 1^\infty} = e^{\infty \log 1} = e^{\infty \cdot 0}$$

ja

$$\infty^0 = e^{\log \infty^0} = e^{0\log\infty} = e^{0\cdot\infty},$$

jotka palautuvat muotoa $\frac{0}{0}$ tai $\frac{\infty}{\infty}$ olevan raja-arvon määrittämiseen.

Esimerkki 7.8. Muuunnetaan muotoa $0 \cdot (-\infty)$ oleva lauseke ensin muotoon $\frac{-\infty}{\infty}$ ja käytetään sitten (kaksi kertaa) l'Hospitalin sääntöä. Siis

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1-} \sqrt{1-x} \cdot \log\left(\log\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 1-} \sqrt{1-x}\, \log(-\log x) \\
&= \lim_{x\to 1-} \frac{\log(-\log x)}{(1-x)^{-\frac{1}{2}}} \\
&\overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{-\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 1-} \frac{\left(\frac{1}{-\log x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)}{(-\frac{1}{2})\cdot(1-x)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-1)} \\
&= \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\log x}}{\frac{1}{2}\,(1-x)^{-\frac{3}{2}}} \\
&= \lim_{x\to 1-} \frac{2}{x} \cdot \lim_{x\to 1-} \frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{\log x} \\
&\overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} 2\cdot \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{3}{2}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot(-1)}{\frac{1}{x}} \\
&= 2\cdot \lim_{x\to 1-} -\frac{3}{2}\, x\,(1-x)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\cdot 0 \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Esimerkki 7.9. Määritetään raja-arvo

$$\lim_{x\to 0+} (e^x - 1)^x .$$

Raja-arvo on muotoa 0^0, mutta muunnoksella

$$\lim_{x\to 0+} (e^x - 1)^x = \lim_{x\to 0+} e^{\log(e^x-1)^x} = \lim_{x\to 0+} e^{x\log(e^x-1)}$$

se voidaan palauttaa muotoa $0 \cdot (-\infty)$ (ja edelleen $\frac{-\infty}{\infty}$) olevan raja-arvon määrittämiseen. Hyödyntämällä lauseen 6.25 (s. 158) raja-arvoa saadaan

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} x\log(e^x - 1) &= \lim_{x\to 0+} \frac{\log(e^x-1)}{\frac{1}{x}} \\
&\underset{\frac{-\infty}{\infty}}{\overset{\text{H}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{e^x-1}\cdot e^x}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0+} -x \cdot e^x \cdot \frac{x}{e^x-1} \\
&= 0 \cdot 1 \cdot 1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Siis

$$\lim_{x\to 0+} (e^x - 1)^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\log(e^x-1)} = e^0 = 1.$$

7.2 Funktion ääriarvot

Määritelmä 7.1. Funktiolla f on pisteessä a *paikallinen maksimi*, jos on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$f(x) \le f(a) \qquad \forall x \in \mathrm{U}_\delta(a).$$

Jos yhtäsuuruus on voimassa vain, kun $x = a$, kyseessä on *aito paikallinen maksimi*.

Määritelmä 7.2. Funktiolla f on pisteessä a *paikallinen minimi*, jos on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$f(x) \ge f(a) \qquad \forall x \in \mathrm{U}_\delta(a).$$

Jos yhtäsuuruus on voimassa vain, kun $x = a$, kyseessä on *aito paikallinen minimi*.

Esimerkki 7.10. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = 0, \\ 0, & \text{kun } x \neq 0. \end{cases}$$

Tällöin piste $x = 0$ on funktion f aito paikallinen maksimipiste. Myös jokainen muu piste on paikallinen ääriarvopiste (mutta ei aito).

Lause 7.9. *Funktiolla f on pisteessä a aito paikallinen maksimi, jos on olemassa sellainen $\delta > 0$, että f on jatkuva ympäristössä $\mathrm{U}_\delta(a)$ ja*

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \,]a-\delta, a[\qquad \text{ja} \qquad f'(x) < 0 \quad \forall x \in \,]a, a+\delta[\,.$$

Todistus. Oletuksen nojalla f on jatkuva välillä $]a-\delta, a+\delta[$. Koska $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in \,]a-\delta, a[$, niin f on lauseen 5.19 (s. 136) nojalla aidosti kasvava välillä $]a-\delta, a]$. Siis

$$f(x) < f(a) \qquad \forall x \in \,]a-\delta, a[\,.$$

Toisaalta $f'(x) < 0$ kaikilla $x \in \,]a, a+\delta[$, joten f on lauseen 5.21 (s. 137) nojalla aidosti vähenevä välillä $[a, a+\delta[$. Siis

$$f(x) < f(a) \qquad \forall x \in \,]a, a+\delta[\,.$$

Täten

$$f(x) < f(a) \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_\delta(a),$$

joten funktiolla f on pisteessä a aito paikallinen maksimi. □

Lause 7.10. *Funktiolla f on pisteessä a aito paikallinen minimi, jos on olemassa sellainen $\delta > 0$, että f on jatkuva ympäristössä $\mathrm{U}_\delta(a)$ ja*

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \,]a-\delta, a[\qquad \text{ja} \qquad f'(x) > 0 \quad \forall x \in \,]a, a+\delta[\,.$$

Todistus. Harjoitustehtävä.

Huomautus. Lauseet 7.9 ja 7.10 eivät ole kääntäen voimassa.

Huomautus. Lauseissa 7.9 ja 7.10 ei vaadita, että derivaatta $f'(a)$ olisi olemassa. Sen sijaan jatkuvuus pisteessä a on oleellinen vaatimus.

Huomautus. Aiemmin on osoitettu (seuraus 5.9, s. 130), että jos a on paikallinen ääriarvopiste ja $f'(a)$ on olemassa, niin $f'(a) = 0$. Siis paikallinen ääriarvo saavutetaan joko derivaatan nollakohdassa tai pisteessä, jossa funktio ei ole derivoituva.

Huomautus 7.11. Jos funktio f on jatkuva pisteessä a ja f' on samanmerkkinen pisteen a kummallakin puolella, niin a ei ole funktion f paikallinen ääriarvopiste (harjoitustehtävä).

Esimerkki 7.11. Etsitään funktion

$$f(x) \;=\; x - x^2$$

paikalliset ääriarvopisteet, ja määritetään mahdollisten ääriarvojen laatu. Koska f on jatkuva ja derivoituva kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin mahdolliset paikalliset ääriarvokohdat ovat derivaatan nollakohtia. Nyt

$$f'(x) \;=\; 1 - 2x \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = \tfrac{1}{2}$$

ja

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & \text{kun } x < \frac{1}{2}, \\ f'(x) < 0, & \text{kun } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Siis funktiolla f on pisteessä $x = \frac{1}{2}$ aito paikallinen maksimi (ja vastaava maksimiarvo on $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$).

Esimerkki 7.12. Osoitetaan, että funktiolla

$$f(x) \;=\; x^3$$

ei ole paikallisia ääriarvopisteitä. Koska f on jatkuva ja derivoituva kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin funktion f mahdolliset paikalliset ääriarvokohdat ovat derivaatan nollakohtia. Nyt

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = 0.$$

Kuitenkin $f'(x) > 0$ kaikilla $x \neq 0$, joten f' ei vaihda merkkiään pisteessä $x = 0$. Siis piste $x = 0$ ei ole funktion f ääriarvokohta, mistä tulos seuraa.

Esimerkki 7.13. Etsitään funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|}{x^2}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

paikalliset ääriarvopisteet, ja määritetään mahdollisten ääriarvojen laatu.

1°: Olkoon $x > 1$. Tällöin

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2},$$

joten f on jatkuva sekä derivoituva ja

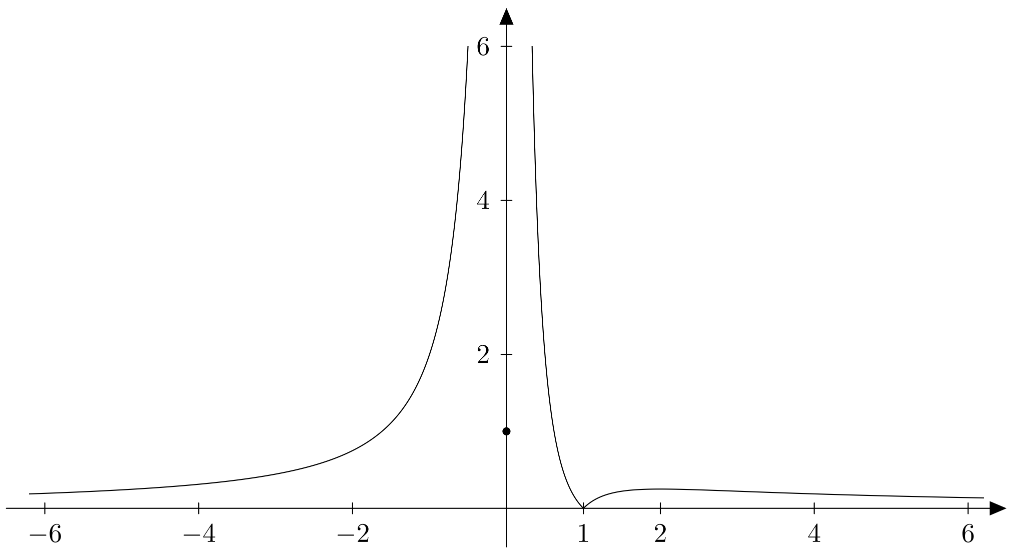
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4} = \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4} = \frac{2x - x^2}{x^4} = \frac{2-x}{x^3}.$$

Siis

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & \text{kun } 1 < x < 2, \\ f'(x) = 0, & \text{kun } x = 2, \\ f'(x) < 0, & \text{kun } x > 2, \end{cases}$$

joten funktiolla f on aito paikallinen maksimi pisteessä $x = 2$ (maksimiarvo $f(2) = \frac{1}{4}$).

2°: Olkoon $x = 1$. Koska $f(1) = 0$ ja $f(x) > 0$ kaikilla $x \neq 1$, niin piste $x = 1$ on funktion f aito paikallinen minimipiste.



Kuva 7.1: Esimerkin 7.13 funktion kuvaaja välillä $[-6, 6]$.

3°: Olkoon $x < 1$ ja $x \neq 0$. Tällöin

$$f(x) \;=\; \frac{1-x}{x^2},$$

joten f on jatkuva sekä derivoituva ja

$$f'(x) \;=\; \frac{-x^2 - 2x(1-x)}{x^4} \;=\; \frac{-x^2 - 2x + 2x^2}{x^4} \;=\; \frac{x^2 - 2x}{x^4} \;=\; \frac{x-2}{x^3}.$$

Koska $f'(x) \neq 0$ kaikilla $x < 1$ ($x \neq 0$), niin funktiolla f ei ole paikallisia ääriarvopisteitä, kun $x < 1$ ja $x \neq 0$.

4°: Olkoon $x = 0$. Koska

$$\lim_{x\to 0} f(x) \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{|x-1|}{x^2} \;=\; \infty,$$

niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$f(x) \;>\; 1 \;=\; f(0) \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_\delta(0).$$

Siis piste $x = 0$ on funktion f aito paikallinen minimipiste.

Kohdista 1°–4° seuraa, että funktiolla f on aito paikallinen minimi pisteissä $x = 0$ ja $x = 1$ sekä aito paikallinen maksimi pisteessä $x = 2$.

Lause 7.12. *Oletetaan, että funktio f on kahdesti derivoituva pisteessä a ja $f'(a) = 0$. Tällöin*

(i) *jos $f''(a) < 0$, niin a on funktion f aito paikallinen maksimipiste,*

(ii) *jos $f''(a) > 0$, niin a on funktion f aito paikallinen minimipiste.*

Todistus. Todistetaan kohta (i), ja jätetään kohdan (ii) todistus harjoitustehtäväksi. Jos $f''(a) < 0$, niin lauseen 5.8 (s. 130) nojalla on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$f'(x) \;>\; f'(a) \;=\; 0 \qquad \forall x \in \,]a-\delta, a[$$

ja

$$f'(x) \;<\; f'(a) \;=\; 0 \qquad \forall x \in \,]a, a+\delta[\,.$$

Derivoituva funktiona f on jatkuva ympäristössä $\mathrm{U}_\delta(a)$, joten lauseen 7.9 nojalla funktiolla f on aito paikallinen maksimi pisteessä a.

$\square$

Esimerkki 7.14. Osoitetaan, että piste $x = 0$ on funktion

$$f(x) = e^x + \sin x - 2x$$

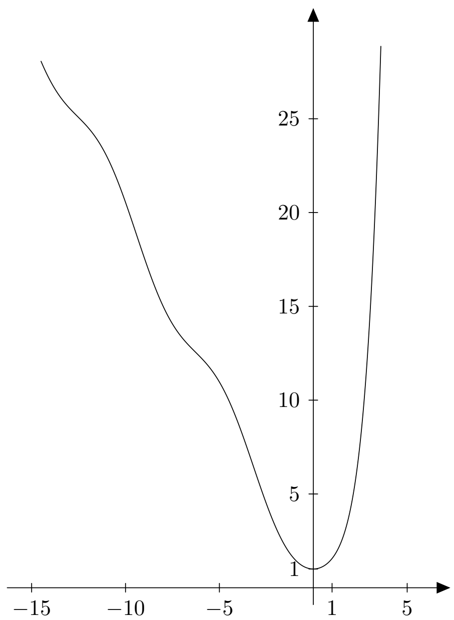
aito paikallinen minimipiste. Nyt

$$f'(x) = e^x + \cos x - 2 \qquad \text{ja} \qquad f''(x) = e^x - \sin x.$$

Koska

$$f'(0) = 1 + 1 - 2 = 0 \qquad \text{ja} \qquad f''(0) = 1 - 0 = 1 > 0,$$

niin piste $x = 0$ on funktion f aito paikallinen minimipiste.



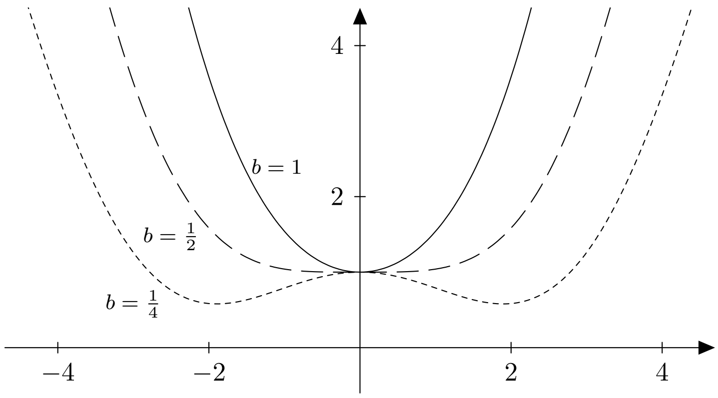
Kuva 7.2: Funktion $e^x + \sin x - 2x$ kuvaaja välillä $[-14\frac{1}{2}, 3\frac{3}{5}]$.

Esimerkki 7.15. Tutkitaan, onko funktiolla

$$f(x) = bx^2 + \cos x \quad (b \in \mathbf{R})$$

paikallista ääriarvoa pisteessä $x = 0$, ja määritetään mahdollisen paikallisen ääriarvon laatu. Nyt

$$f'(x) = 2bx - \sin x \qquad \text{ja} \qquad f''(x) = 2b - \cos x.$$



Kuva 7.3: Funktion $bx^2 + \cos x$ kuvaaja, kun $b = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$ ja $b = 1$.

Siis $f'(0) = 0$ kaikilla $b \in \mathbf{R}$. Koska $f''(0) = 2b - 1$, niin

$$f''(0) \; > \; 0, \;\; \text{kun } b > \tfrac{1}{2}, \qquad \text{ja} \qquad f''(0) \; < \; 0, \;\; \text{kun } b < \tfrac{1}{2}.$$

Täten piste $x = 0$ on funktion f aito paikallinen minimipiste, kun $b > \frac{1}{2}$, ja aito paikallinen maksimipiste, kun $b < \frac{1}{2}$.

Olkoon sitten $b = \frac{1}{2}$. Tällöin $f''(0) = 0$, joten lausetta 7.12 ei voida hyödyntää. Koska

$$f''(x) \; = \; 2 \cdot \tfrac{1}{2} - \cos x \; = \; 1 - \cos x \; > \; 0 \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_{\frac{\pi}{2}}(0),$$

niin f' on aidosti kasvava pisteen $x = 0$ ympäristössä. Siis

$$\begin{cases} f'(x) \; < \; 0, & \text{kun } -\tfrac{\pi}{2} < x < 0, \\ f'(x) \; = \; 0, & \text{kun } x = 0, \\ f'(x) \; > \; 0, & \text{kun } 0 < x < \tfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

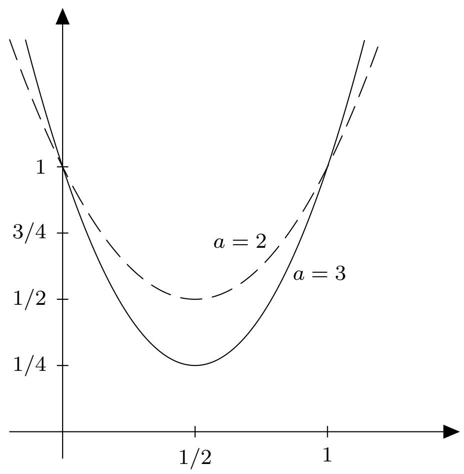
joten piste $x = 0$ on funktion f aito paikallinen minimipiste (kun $b = \frac{1}{2}$).

Huomautus 7.13. Jos funktiolla f on välillä I suurin (pienin) arvo, niin se saavutetaan joko

(i) välin sisäpisteessä paikallisessa ääriarvokohdassa, tai

(ii) väliin mahdollisesti kuuluvassa päätepisteessä.

Huomautus 7.14. Jos funktio f on jatkuva ja I on suljettu väli, niin suurin (pienin) arvo saavutetaan aina. Muulloin saavuttaminen on epävarmaa.



Kuva 7.4: Funktion $x^a + (1-x)^a$ kuvaaja välillä $[0,1]$, kun $a = 2$ (katkoviiva) ja $a = 3$ (yhtenäinen viiva).

Esimerkki 7.16. Olkoon $a > 1$. Osoitetaan, että

$$2^{1-a} \ \leq \ x^a + (1-x)^a \ \leq \ 1 \qquad \forall x \in [0,1].$$

Olkoon

$$f(x) \ = \ x^a + (1-x)^a.$$

Esimerkin 6.17 (s. 171) nojalla f on jatkuva sekä derivoituva välillä $[0,1]$ ja

$$f'(x) \ = \ ax^{a-1} + a(1-x)^{a-1}(-1) \ = \ a\Big(x^{a-1} - (1-x)^{a-1}\Big).$$

Koska yleinen potenssifunktio ($a - 1 > 0$) on välillä $[0,1]$ aidosti kasvava (esimerkki 6.17, s. 171), niin

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \ &\Leftrightarrow \ x^{a-1} - (1-x)^{a-1} \ = \ 0 \\ &\Leftrightarrow \ x^{a-1} = (1-x)^{a-1} \\ &\Leftrightarrow \ x = 1 - x \\ &\Leftrightarrow \ x = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nyt

$$f(0) \ = \ f(1) = 1 \qquad \text{ja} \qquad f(\tfrac{1}{2}) \ = \ \left(\tfrac{1}{2}\right)^a + \left(\tfrac{1}{2}\right)^a \ = \ \tfrac{2}{2^a} \ = \ 2^{1-a}.$$

Lisäksi $2^{1-a} < 1$, kun $a > 1$. Siis välillä $[0,1]$ funktion f suurin arvo on 1 ja pienin arvo on 2^{1-a}, mistä väite seuraa.